معادلات الفيزياء الرياضية



ا. تيخونوف و ا. سامارسكي

يتناول هذا الكتاب دراسة مسائل الفيزياء الرياضية التى تؤول إلى معادلات بالمشتقات الجزئية . وقد قسمت مادة الكتاب إلى أبواب حسب أنماط هذه المعادلات . بحيث تبدأ دراسة كل نمط منها بحل أبسط المسائل الفيزيائية التى تؤول إلى معادلة من النمط موضع البحث . ويحرص المؤلفان على مراعاة الدقة الرياضية فى صياغة المسائل وكذلك شمول التفسير الفيزيائى لمغزى النتائج التى نحصل عليها . كما زود كل باب من أبواب الكتاب بعدد من المسائل والأمثلة .

وقد تم تأليف الكتاب على أساس محاضرات ألقيت بكلية الفيزياء لجامعة موسكو .



دار « مير » للطباعة والنشر

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I

Издательство «Наука»
Москва

ا. تيخونوف وا. سامارسكي

معادلات الفيزياء الرياضية



ترجمـة

الدكتـور أحمـد صـادق القرمـانى

دار « مير » للطباعة والنشر
الاتحاد السوفييتي ـ موسكو

إلى القــراء الأعــزاء

تصدر دار « مير » للطباعة والنشر الكتب العلمية والتكنيكية المختارة من أفضل المراجع الجامعية وكذلك الكتب العلمية المبسطة .

وبإمكانكم الحصول على أسماء هذه الكتب من الكتالوجات التى تنشرها الدار باللغات العربية والإنجليزية والفرنسية والإسبانية .

ويسر دار « مير » أن تكتبوا إليها عن رأيكم فى هذه الكتب ، حول مضمونها وترجمتها وأسلوبها ، وتكون شاكرة لكم لو أبديتم لها ملاحظاتكم وانطباعاتكم .

عنواننا : الاتحاد السوفييتى ـ موسكو ١١٠
بيرفى ريجسكى بيريولوك ٢

на арабском языке

مقدمة

تقدم دار « مير » للطباعة والنشر هذا الكتاب فى طرق الفيزياء الرياضية فى جزأين وهو يعتبر مرجعًا موسعًا فى هذا الموضوع لطلبة كليات الهندسة والعلوم وللمتخصصين فى الفيزياء والرياضة التطبيقية والبحتة والعلوم الهندسية .

إن موضوعات الفيزياء الرياضية لترتبط ارتباطًا وثيقًا بدراسة مختلف العمليات الفيزيائية كتلك التى تدرس فى الهيدروديناميكا ونظرية المرونة والكهروديناميكا وغيرها . وتحتوى كل المسائل الرياضية الناشئة عند دراسة هذه العمليات على عناصر مشتركة كثيرة هي ما يشكل محتوى الفيزياء الرياضية ، مع توضيح الاختلافات بين كل عملية وأخرى التى توجد خاصة فى مراحل بداية ونهاية العملية الفيزيائية . وتعتبر طرق البحث التى تميز هذا العلم طرقًا رياضية من حيث الجوهر .

وفى هذا الكتاب تدرس مسائل الفيزياء الرياضية التى تؤدى إلى معادلات تفاضلية جزئية . وقد رتبت أبواب الكتاب بحيث تناظر الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية وتبدأ دراسة كل نمط بالمسائل الفيزيائية المبسطة التى تؤدى إلى المعادلات من هذا النمط .

ويهتم الكتاب بالصياغة الرياضية للمسائل والشرح الدقيق والوافى لحل المسائل وتفسير النتائج تفسيرًا فيزيائيًا .

والجزء الأول من الكتاب يحتوى على دراسة الأنماط الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية والمسائل الفيزيائية المؤدية إليها وطرق حلها ويركز بشكل أساسى على المسائل المصاغة فى بعد واحد أو بعدين (فى المستوى) . وفى نهاية كل باب توجد مسائل تهدف إلى تمرين القارئ على اكتساب المهارة اللازمة لحل المسائل بنفسه ، كما توجد ملاحق تعطى فيها أمثلة على تطبيق الطرق المشروحة لحل مختلف مسائل الفيزياء والتكنيك .

الباب الأول

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية

يؤدى الكثير من مسائل الفيزياء الرياضية إلى معادلات تفاضلية جزئية . وتصادفنا المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية أكثر من غيرها . وفى هذا الباب سندرس تصنيف هذه المعادلات .

بند ١ ـ تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

فقرة ١ : المعادلات التفاضلية فى متغيرين مستقلين . نورد التعريفات اللازمة . المعادلة فى المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية فى متغيرين مستقلين x, y هى العلاقة بين الدالة المجهولة $u(x, y)$ ومشتقاتها الجزئية حتى الرتبة الثانية بما فى ذلك المشتقات من الرتبة الثانية نفسها* :

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

وبالمثل تكتب المعادلة فى حالة عدد أكبر من المتغيرات المستقلة .

والمعادلة تسمى خطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا إذا كانت على الصورة :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

حيث a_{11}, a_{12}, a_{22} ـ دوال فى x و y .

---

* نستخدم هنا الرموز التالية للمشتقات

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \ldots$$

وإذا كانت المعاملات a_{11}, a_{12}, a_{22} تعتمد ليس فقط على y ، x وإنما هي مثل F_1 دوال فى x, y, u, u_x, u_y فإن مثل هذه المعادلة تسمى بمعادلة شبه خطية .

وتسمى المعادلة خطية إذا كانت خطية بالنسبة إلى المشتقات من الرتب العليا u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} وبالنسبة إلى الدالة u ومشتقاتها الأولى u_x, u_y أيضًا :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \qquad (2)$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ ــ دوال فقط فى x و y .

وإذا كانت معاملات المعادلة (2) لا تعتمد على x و y فإنها تكون عبارة عن معادلة خطية بمعاملات ثابتة . والمعادلة تسمى متجانسة إذا كانت $f(x, y) = 0$.

وبواسطة تحويل المتغيرات :

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

الذى يسمح بتحويل عكسى نحصل على معادلة جديدة تكافئ المعادلة الأصلية . ومن الطبيعى أن نطرح السؤال التالى : كيف نختار ξ و η بحيث تصبح للمعادلة فى هذين المتغيرين أبسط صورة ؟

فى هذه الفقرة سنجيب على هذا السؤال للمعادلات الخطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا على الصورة (1) فى المتغيرين المستقلين x و y :

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

وبتحويل المشتقات إلى المتغيرين الجديدين نحصل على :

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

وبالتعويض بقيم المشتقات من (3) فى المعادلة (1) نحصل على :

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \qquad (4)$$

حيث

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$
$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$
$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

أما الدالة $\bar{F}$ فلا تعتمد على المشتقات الثانية . ونشير إلى أنه إذا كانت المعادلة الأصلية خطية أى أن :

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

فإن $\bar{F}$ تكون على الصورة

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

أى تظل المعادلة خطية*

نختار المتغيرين η , ξ بحيث يصبح المعامل $\bar{a}_{11}$ مساويًا للصفر . ندرس المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى :

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \qquad (5)$$

نفرض أن $z = \varphi(x, y)$ حل خاص ما لهذه المعادلة . فإذا وضعنا $\xi = \varphi(x, y)$ فإنه من الواضح أن المعامل $\bar{a}_{11}$ يكون مساويًا للصفر . وبذلك ترتبط المسألة المذكورة أعلاه المتعلقة باختيار متغيرين مستقلين جديدين بحل المعادلة (5) .

نثبت المأخوذتين (lemmas) التاليتين :

١ ـ إذا كانت $z = \varphi(x, y)$ حلاً خاصًا للمعادلة

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0,$$

* نشير إلى أنه إذا كان تحويل المتغيرات خطيا فإن $\bar{F} = F$ وذلك لأن المشتقات الثانية بالمتغيرين ξ و η فى العلاقات (3) تكون فى هذه الحالة مساوية للصفر ولا نحصل على $\bar{F}$ على حدود إضافية من تحويل المشتقات الثانية .

فإن العلاقة $\varphi(x, y) = C$ تكون عبارة عن تكامل عام للمعادلة التفاضلية العادية

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dx^2 = 0. \qquad (6)$$

٢ ـ إذا كانت $\varphi(x, y) = C$ تكاملاً عامًّا للمعادلة التفاضلية العادية

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\, dx\, dy + a_{22}\, dx^2 = 0,$$

فإن الدالة $z = \varphi(x, y)$ تحقق المعادلة (5) .

نثبت المأخوذة الأولى . حيث إن الدالة $z = \varphi(x, y)$ تحقق المعادلة (5) فإن المتساوية

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \qquad (7)$$

تعتبر متطابقة : فهى تتحقق لجميع x, y فى تلك المنطقة التى يعطى فيها الحل . والعلاقة $\varphi(x, y) = C$ تعتبر تكاملاً عامًّا للمعادلة (6) إذا كانت الدالة المحددة من العلاقة الضمنية $\varphi(x, y) = C$ تحقق المعادلة (6) . نفرض أن

$$y = f(x, C)$$

هى هذه الدالة ، عندئذ يكون

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)}, \qquad (8)$$

حيث يشير القوسان والرمز $y = f(x, C)$ إلى أن المتغير y فى الطرف الأيمن للمتساوية (8) لا يعتبر متغيرًا مستقلاً ، وإنما تكون له قيمة مساوية $f(x, C)$. ومن هنا ينتج أن $y = f(x, C)$ تحقق المعادلة (6) لأن

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \\ = \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C)} = 0,$$

وذلك لأن الصيغة فى القوسين المربعين تساوى الصفر لجميع قيم x, y وليس فقط عندما $y = f(x, C)$.

نثبت المأخوذة الثانية . نفرض أن $\varphi(x, y) = C$ هو التكامل العام للمعادلة (6) . نثبت أن

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \qquad (7')$$

لأية نقطة (x, y) . نفرض أن (x_0, y_0) نقطة ما معطاة . وإذا أثبتنا أن فى هذه النقطة تتحقق المتساوية $(7')$ فإنه سيتتج من هنا وفقًا للطابع الاختيارى للنقطة (x_0, y_0) ان المتساوية $(7')$ هى متطابقة وان الدالة $\varphi(x, y)$ تعتبر حلاً للمعادلة $(7')$. نمد من النقطة (x_0, y_0) منحنى تكامليًا للمعادلة (6) وذلك بفرض $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ وبدراسة المنحنى $y = f(x, C_0)$. من الواضح أن $y_0 = f(x_0, C_0)$. ويكون لدينا لجميع نقط هذا المنحنى مايلى :

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$
$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,\, C_0)} = 0.$$

وبفرض أن $x = x_0$ فى المتساوية الأخيرة نحصل على :

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0y_0)\varphi_y(x_0y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0y_0) = 0,$$

وهو المطلوب إثباته * .

والمعادلة (6) تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) ، وتسمى تكاملاتها بالمميزات .

وبفرض أن $\xi = \varphi(x, y)$ حيث $\varphi(x, y) = \text{const}$ هو التكامل العام للمعادلة (6) نجعل بذلك معامل $u_{\xi\xi}$ مساويًا للصفر. وإذا كان $\psi(x, y) = \text{const}$ تكاملاً عامًا آخر للمعادلة (6) لا يعتمد على $\varphi(x, y)$ فإننا إذا فرضنا أن $\eta = \psi(x, y)$ نجعل معامل u_{η} يساوى الصفر أيضًا .

---

* الارتباط المثبت بين المعادلتين (5) و (6) يكافئ الارتباط المعروف بين المعادلة التفاضلية الخطية فى المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى وبين مجموعة المعادلات التفاضلية العادية . ويمكن التأكد من ذلك بتحليل الطرف الأيسر للمعادلة (5) إلى حاصل ضرب صيغتين تفاضليتين خطيتين (انظر كتاب ستيبانوف «المعادلات التفاضلية» طبعة دار «مير») .

والمعادلة (6) تحلل إلى معادلتين :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{10}$$

وتحدد إشارة الصيغة تحت الجذر نوع المعادلة

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F=0. \tag{1}$$

وسنسمى هذه المعادلة فى النقطة M بالمعادلة من النمط الزائدى إذا كان $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ فى النقطة M ومن النمط الناقصى إذا كان $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ فى النقطة M ومن النمط المكافئ إذا كان $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ فى النقطة M *.

وليس من الصعب التحقق من صحة العلاقة

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})D^2 \quad \text{حيث} \quad D=\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_y$$

التى تنتج منها لامتغيرية (ثبات) نوع المعادلة عند تحويل المتغيرات لأن المحدد الدالى (الجاكوبيان) D لتخويل المتغيرات لا يساوى الصفر. وقد تنتمى المعادلة الواحدة إلى أنماط مختلفة فى النقط المختلفة من منطقة تعريفها.

ندرس المنطقة G التى يكون للمعادلة فى جميع نقطها نفس النمط الواحد. ويمر بكل نقطة من نقط المنطقة G مميزتان ، علمًا بأن المميزتين للمعادلات من النمط الزائدى (الزائدية) تكون حقيقيتين ومختلفتين ، أما للمعادلات من النمط الناقصى (الناقصية) فتكون المميزتان مركبتين ومختلفتين ، وللمعادلات من النمط المكافئ (المكافئة) فتكون المميزتان حقيقيتين ومنطبقتين على بعضهما.

ندرس بالتفصيل كل حالة من هذه الحالات على انفراد.

١ ـ للمعادلة من النمط الزائدى يكون $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ ويكون الطرفان

* هذه المصطلحات مستعارة من نظرية المنحنيات من الرتبة الثانية.

الأيمنان للمعادلتين (9) و (10) حقيقيين ومختلفين. والتكاملان العامان لها $\psi(x, y) = C$ ، $\varphi(x, y) = C$ يحددان عائلتين حقيقيتين من المميزات.
بفرض أن

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{11}$$

نحول المعادلة (4) بعد القسمة على معامل $u_{\xi\eta}$ إلى الصورة :

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \text{حيث} \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$$

وهذه هى ما يسمى بالصورة القياسية لمعادلات النمط الزائدى*

وكثيرًا ما تستخدم صورة قياسية أخرى. نضع

$$\xi = \alpha + \beta, \ \eta = \alpha - \beta,$$

أى أن

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \ \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

---

* لكى يصبح من الممكن إدخال المتغيرين الجديدين η ، ξ بدلالة الدالتين ψ ، φ يجب التأكد من استقلال هاتين الدالتين عن بعضها. والشرط الكافى لذلك هو أن يساوى المحدد الدالى المناظر صفرا. نفرض ان المحدد الدالى

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

يساوى الصفر فى نقطة ما M. عندئذ يكون صحيحا التناسب بين صفى هذا المحدد اى أن :

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

ولكن ذلك مستحيل لأن

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$
$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(وعند ذلك نحق أن نعتبر $a_{11} \neq 0$ وهو أمر لا يعد تحديدا لعمومية المسألة). ومن ثم أثبتت استقلالية الدالتين φ ، ψ عن بعضها.

حيث β ، α متغيران جديدان . عندئذ يكون

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \; u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \; u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

ونتيجة لذلك تأخذ المعادلة (4) الصورة :

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

٢ ـ للمعادلات من النمط المكافئ يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ، وتنطبق المعادلتان (9) و (10) فنحصل على تكامل عام واحد للمعادلة (6) : $\varphi(x, y) = \text{const}$. نضع فى هذه الحالة :

$$\xi = \varphi(x, y) \quad , \quad \eta = \eta(x, y),$$

حيث $\eta(x, y)$ أية دالة لا تعتمد على φ . وعند ذلك الاختيار للمتغيرين يكون المعامل

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

وذلك لأن $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ ، ومن هنا ينتج أن

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x + \sqrt{a_{22}}\,\eta_y\right) = 0.\end{aligned}$$

وبعد قسمة طرفى المعادلة (4) على معامل $u_{\eta\eta}$ نحصل على الصورة القياسية للمعادلة من النمط المكافئ

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

وإذا لم تدخل u_ξ فى الطرف الأيمن فإن هذه المعادلة تصبح معادلة تفاضلية عادية تعتمد على ξ كبارامتر.

٣ ـ للمعادلة من النمط الناقصى يكون $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ ويكون الطرفان الأيمنان للمعادلتين (9) و (10) مركبين . نفرض أن

$$\varphi(x, y) = C$$

هو التكامل المركب للمعادلة (9) ، عندئذ يكون

$$\varphi^*(x, y) = C$$

حيث φ^* الدالة المرافقة للدالة φ ، وهى عبارة عن التكامل العام للمعادلة المرافقة (10) . ننتقل إلى المتغيرات المركبة بفرض

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

عندئذ تتحول المعادلة من النمط الناقصى إلى نفس الصورة التى تتحول إليها المعادلة الزائدية .

ولكى لا نتعامل مع المتغيرات المركبة ندخل متغيرين جديدين α , β يساويان :

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}$$

ومن ثم يكون

$$\xi = \alpha + i\beta, \ \eta = \alpha - i\beta.$$

وفى هذه الحالة يكون

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \\ = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + \\ + 2i\,(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \end{aligned}$$

أى أن

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \ , \ \ \bar{a}_{12} = 0.$$

وتأخذ المعادلة (4) بعد قسمة طرفيها على معامل $u_{\alpha\alpha}$ الصورة*

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

* تعتبر مثل هذه التحويلات قانونية فقط فى تلك الحالة عندما تكون معاملات المعادلة (1) دوال تحليلية . بالفعل فإذا كان $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ فإن الطرفين الأيمنين للمعادلتين (9) و (10) مركبان ، وبالتالى يجب أن تكون للدالة y قيم مركبة . ويمكن التحدث عن حل هذه المعادلات فقط عندما تكون المعاملات $a_{ik}(x, y)$ معرفة لقيم y المركبة . وعند تحويل المعادلات الناقصية إلى الصورة القياسية سنكتفى بحالة المعاملات التحليلية .

وبذلك فوفقًا لإشارة الصيغة $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ توجد الصور القياسية التالية للمعادلة (1) :

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (النمط الزائدى) : $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ أو $u_{xy} = \Phi$ ،

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (النمط الناقصى) : $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$ ،

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (النمط المكافئ) : $u_{xx} = \Phi$.

فقرة ٢ : تصنيف المعادلات من الرتبة الثانية فى عدة متغيرات مستقلة .

ندرس المعادلة الخطية ذات المعاملات الحقيقية :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \qquad (12)$$

حيث a, b, c, f هى دوال فى $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ندخل متغيرات مستقلة جديدة ξ_k ، بفرض أن

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

عندئذ يكون

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \alpha_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

حيث

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

وبالتعويض بصيغ المشتقات فى المعادلة الأصلية نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0$$

حيث

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

ندرس الصورة التربيعية

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j, \qquad (13)$$

التى تساوى معاملاتها المعاملات a_{ij} للمعادلة الأصلية فى نقطة ما $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.
وبإجراء التحويل الخطى التالى للمتغير y :

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \eta_k,$$

نحصل للصورة التربيعية على صيغة جديدة :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l \quad \text{، حيث} \quad \bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl} \text{ .}$$

وبذلك تتغير معاملات الجزء الرئيسى من المعادلة مثل تغير معاملات الصورة التربيعية عند التحويل الخطى .

وكما هو معلوم ، يمكن ، باختيار تحويل خطى مناسب ، تحويل المصفوفة (a_{ij}^0) للصورة التربيعية إلى الصورة القطرية التى يكون فيها

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 1 \quad \text{أو} \quad |\bar{a}_{ii}^0| = 0$$

$$\bar{a}_{ij}^0 = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots n).$$

ووفقًا لقانون القصور يكون عدد المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ الموجبة والسالبة والمساوية للصفر فى الشكل القياسى للصورة التربيعية عددًا لا متغيرًا بالنسبة للتحويل الخطى .

والمعادلة (12) فى النقطة M_0 تسمى بالمعادلة من النمط الناقصى إذا كانت كل المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ الـ n ذات إشارة واحدة ، وتسمى بالمعادلة من النمط الزائدى (أو النمط الزائدى الاعتيادى) إذا كان $n-1$ من المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ لها إشارة واحدة ومعامل واحد إشارته مضادة لها . وتسمى المعادلة بالمعادلة من النمط فوق الزائدى (ultra - hyperbolic) إذا كان من بين $\bar{a}_{ii}^0$ يوجد m معامل لها إشارة واحدة ، و $n-m$ معامل لها إشارة مضادة $(m, n-m > 1)$. وتسمى المعادلة بالمعادلة من النمط المكافئ إذا كان ولو معامل واحد من المعاملات $\bar{a}_{ii}^0$ مساويًا للصفر .

نختار المتغيرات المستقلة الجديدة ξ_i بحيث يكون فى النقطة M_0 :

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \alpha_{ik}^0,$$

حيث α^0_{ik} هى معاملات التحويل التى تحول الصورة التربيعية (13) إلى الصورة القياسية (على سبيل المثال بفرض أن $\xi_k = \sum \alpha^{(0)}_{ik} x_l$) فينتج أن المعادلة فى النقطة M_0 وفقًا لنمطها تتحول إلى إحدى الصور القياسية التالية :

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} + \Phi = 0 \quad \text{(النمط الناقصى)}$$

$$u_{x_1x_1} = \sum_{l=2}^{n} u_{x_lx_l} + \Phi \quad \text{(النمط الزائدى)}$$

$$\sum_{l=1}^{m} u_{x_lx_l} = \sum_{l=m+1}^{n} u_{x_lx_l} + \Phi \quad (m > 1,\ n - m > 1) \quad \text{(النمط فوق الزائدى)}$$

$$\sum_{l=1}^{n-m} (\pm u_{x_lx_l}) + \Phi = 0 \quad (m > 0) \quad \text{(النمط المكافئ)}$$

ولن ندرس هنا التقسيم الأكثر تفصيلاً للمعادلات من النمط المكافئ إلى معادلات ناقصية مكافئة ، وزائدية مكافئة والخ .

وهكذا ، فإذا كانت المعادلة (12) تنتمى فى نقطة ما M إلى نمط معين فإنه يمكن تحويلها إلى الصورة القياسية المناظرة فى هذه النقطة .

ندرس بتفصيل أكثر موضوع إمكانية تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية فى جوار ما للنقطة M إذا كانت المعادلة فى جميع نقط هذا الجوار تنتمى إلى نمط واحد .

إذا أردنا تحويل المعادلة فى منطقة ما إلى الصورة القياسية اضطررنا إلى إخضاع الدوال $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $(i = 1, 2, \ldots, n)$ إلى العلاقات التفاضلية $\bar{a}_{kl} = 0$ للقيم $k \neq l$ (أى يجب عندئذ أن تحقق الدوال ξ_i المعادلات التفاضلية $\bar{a}_{kl} = 0$ فى حالة $k \neq l$) . وعدد هذه الشروط المساوى $n(n-1)/2$ يفوق العدد n للدوال التى ينبغى تحديدها ξ عندما يكون $n > 3$. وفى حالة $n = 3$ يمكن بوجه عام جعل العناصر غير القطرية فى المصفوفة $(\bar{a}_{ik})$ مساوية للصفر غير أن العناصر القطرية قد تكون عند ذلك مختلفة فيما بينها .

وبالتالى فعند $n \geqslant 3$ لا يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية فى جوار النقطة M . وعند $n = 2$ يمكن جعل المعامل غير القطرى الوحيد مساويًا للصفر وتحقيق شرط تساوى المعاملين القطريين لبعضهما وهو ما تم إجراؤه فى الفقرة ١ .

وإذا كانت معاملات المعادلة (12) ثابتة فإننا بتحويلنا هذه المعادلة (12) إلى الصورة القياسية فى نقطة واحدة M نحصل على معادلة محولة إلى الصورة القياسية فى كل منطقة تعريف المعادلة .

فقرة ٣ : الصورة القياسية للمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة . فى حالة المتغيرين المستقلين تكون المعادلة الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة على الصورة :

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f(x,\ y)=0. \qquad (14)$$

وتناظرها معادلة مميزة ذات معاملات ثابتة . ولذا فإن المميزتين تكونان عبارة عن مستقيمين :

$$y=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_1, \qquad y=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_2.$$

وبواسطة التحويل المناسب للمتغيرات تتحول المعادلة (14) إلى إحدى الصور البسيطة التالية :

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \qquad \text{(النمط الناقصى)} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \\ \text{أو} \\ u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \end{array}\right\} \qquad \text{(النمط الزائدى)} \qquad (16)$$

$$u_{\xi\xi}+b_1u_\xi+b_2u_\eta+cu+f=0 \qquad \text{(النمط المكافئ)} \qquad (17)$$

ولتبسيط المعادلة أكثر من ذلك ندخل بدلاً من u دالة جديدة v :

$$u=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot v$$

حيث λ و μ ثابتان لم يحددا بعد . عندئذ يكون

$$\begin{aligned} u_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi+\lambda v), \\ u_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta+\mu v), \\ u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v), \\ u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta}+\lambda v_\eta+\mu v_\xi+\lambda\mu v), \\ u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta}+2\mu v_\eta+\mu^2 v). \end{aligned}$$

وبالتعويض بصيغ المشتقات فى المعادلة (15) واختصار $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$ نحصل على :

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)\, v_\xi + (b_2 + 2\mu)\, v_\eta + \\ + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)\, v + f_1 = 0.$$

ونختار البارامترين λ و μ بحيث يكون معاملان ، وليكونا مثلاً معاملى المشتقتين الأولين ، مساويين للصفر $(\lambda = -b_1/2;\ \mu = -b_2/2)$. ونتيجة لذلك نحصل على :

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

حيث γ ثابت يعبر عنه بدلالة b_2 ، b_1 ، c و $f_1 = fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$. وبإجراء عمليات مماثلة لحالتى (16) و (17) نحصل على الصور القياسية التالية للمعادلات ذات المعاملات الثابتة :

(النمط الناقصى) $$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0$$

(النمط الزائدى)
$$\left.\begin{array}{r} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \\ \text{أو} \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \end{array}\right\}$$

(النمط المكافئ) $$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0$$

وكما ذكرنا فى الفقرة ٢ تتحول المعادلة ذات المعاملات الثابتة فى حالة عدة متغيرات مستقلة

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

بواسطة التحويل الخطى للمتغيرات ، إلى الصورة القياسية لجميع نقط تعريفها فى نفس الوقت . وبادخال دالة جديدة v بدلاً من u

$$u = v e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$

وباختيار λ_i بالطريقة اللازمة يمكننا تبسيط صورة المعادلة مما يوصلنا إلى صورة قياسية مشابهة لحالة $n = 2$.

مسائل على الباب الأول

١ ـ عين المناطق التى تكون فيها المعادلة

$$u_{xx}+yu_{yy}=0$$

من النمط الزائدى ومن النمط الناقصى ومن النمط المكافئ وحولها إلى الصورة القياسية فى المنطقة التى تكون فيها زائدية .

٢ ـ حول إلى الصورة القياسية كلا من المعادلات :

a) $u_{xx}+xyu_{yy}=0.$
b) $yu_{xx}-xu_{yy}+u_x+yu_y=0.$
c) $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}=0.$
d) $u_{xx}+(1+y)^2u_{yy}=0.$
e) $xu_{xx}+2\sqrt{xy}\,u_{xy}+yu_{yy}-u_x=0.$
f) $(x-y)u_{xx}+(xy-y^2-x+y)u_{xy}=0.$
g) $y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}+u_x=0.$
h) $\sin^2 y u_{xx}-e^{2x}u_{yy}+3u_x-5u=0.$
i) $u_{xx}+2u_{xy}+4u_{yy}+2u_x+3u_y=0.$

٣ ـ حول إلى الصورة القياسية وبسط أكبر تبسيط ممكن المعادلة التالية :

$$au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0$$

حيث a,b,c ثوابت .

٤ ـ بإدخال الدالة $v=ue^{\lambda x+\mu y}$ واختيار البارامترين μ , λ بالطريقة اللازمة بسط كلا من المعادلات التالية ذات المعاملات الثابتة :

a) $u_{xx}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u=0.$
b) $u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_y+\alpha u+\beta u_x.$
c) $u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{yy}=\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u.$
d) $u_{xy}=\alpha u_x+\beta u_y.$

الباب الثاني

المعادلات من النمط الزائدى

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية من النمط الزائدى تصادفنا بكثرة فى المسائل الفيزيائية المتعلقة بالعمليات الذبذبية . والمعادلة من النمط الزائدى فى أبسط صورة لها

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

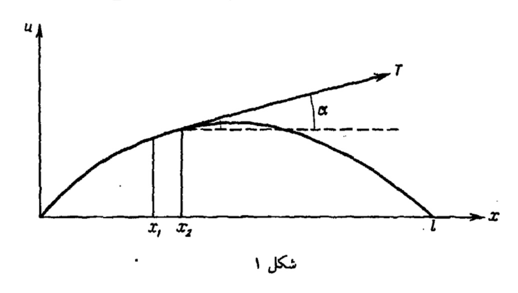
تسمى عادة بمعادلة ذبذبات الوتر . وفى هذا الباب ، كما فى الأبواب التالية ، سنكتفى بدراسة طائفة المعادلات الخطية .

بند ١ ـ أبسط المسائل المؤدية إلى معادلات من النمط الزائدى . صياغة المسائل الحدية

فقرة ١ : معادلة الذبذبات المتعرضة الصغيرة للوتر . يمكن تحديد كل نقطة من نقط وتر طوله l بقيمة إحداثيها الأفقى x . ويمكن وصف عملية ذبذبة الوتر بواسطة إعطاء مواضع نقط هذا الوتر فى مختلف اللحظات الزمنية . ويكفى لتعيين وضع الوتر فى اللحظة الزمنية t إعطاء مركبات متجه إزاحة النقطة x $\{u_1(x, t),\ u_2(x, t),\ u_3(x, t)\}$ فى اللحظة t .

سندرس أبسط أمثلة ذبذبات الوتر . فسنفترض أن إزاحات الوتر تقع فى مستوى واحد (x, u) وأن متجه الإزاحة u يكون عموديًا على المحور x فى أية لحظة زمنية . عندئذ يمكن وصف عملية الذبذبة بدالة واحدة $u(x, t)$ تميز الحركة الرأسية للوتر . وسنعتبر الوتر خيطًا مرنًا قابلاً للانثناء . وتتلخص الصيغة الرياضية لمفهوم قابلية الوتر للانثناء فى أن الاجهادات الناشئة فى الوتر تكون دائمًا متجهة فى اتجاه المماس لمقطعه الجانبى اللحظى (شكل ١) . ويعبر هذا الشرط عن أن الوتر لا يقاوم الانثناء .

ويمكن حساب مقدار الشد الناشئ فى الوتر نتيجة للمرونة وفقًا لقانون هوك . وسندرس الذبذبات الصغيرة للوتر ونهمل مربع u_x بالمقارنة مع الواحد الصحيح .



شكل ١

نحسب بالاستعانة بهذا الشرط الاستطالة التى تحدث لجزء الوتر (x_1, x_2) . وطول قوس هذا الجزء يساوى

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2}\, dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

وبذلك فنى حدود الدقة التى اصطلحنا عليها لا تحدث استطالة لأجزاء الوتر خلال عملية الذبذبة . ومن هنا ينتج وفقًا لقانون هوك أن مقدار الشد T فى كل نقطة لا يتغير بتغير الزمن . نوضح كذلك أن الشد لا يعتمد على x ، أى أن

$$T(x) = T_0 = \text{const}.$$

نعين مسقطى الشد على المحورين u , x (نرمز لها بالرمزين T_u ، T_x) :

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong T(x),$$
$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) \tan \alpha = T(x)\, u_x,$$

حيث α هى زاوية ميل المماس للمنحنى $u(x, t)$ على المحور x . وعلى الجزء (x_1, x_2) تؤثر قوى الشد والقوى الخارجية وقوى القصور . ومجموع مساقط كل القوى على المحور x يجب أن يكون مساويًا للصفر (نحن ندرس فقط الذبذبات المستعرضة) .

وحيث إن قوى القصور والقوى الخارجية تتجه وفقًا لافتراضنا على امتداد المحور u فإن

$$T(x_1) = T(x_2) \quad \text{أو} \quad T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \qquad (1)$$

ومن هنا وتبعًا لاختيارية x_1 و x_2 ينتج أن الشد لا يعتمد على x ، أى إنه لجميع قيم x و t يكون

$$T(x) \equiv T_0. \qquad (2)$$

وبعد هذه الملاحظات التمهيدية التي أوردناها ننتقل إلى استنباط معادلة الذبذبات المستعرضة للوتر. نستعين بالقانون الثانى لنيوتن. إن مركبة كمية حركة جزء الوتر (x_1, x_2) على المحور u تساوى

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t)\, \rho(\xi)\, d\xi,$$

حيث ρ الكثافة الخطية للوتر. نساوى التغير فى كمية الحركة خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\, [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, d\xi$$

بدفع القوى المؤثرة التى تتكون من الشد

$$T_0 u_x|_{x=x} - T_0 u_x|_{x=x}$$

فى النقطتين x_1 و x_2 والقوى الخارجية التى سنعتبرها موزعة توزيعًا متصلاً بالكثافة (بالحمل) $F(x, t)$ المؤثرة على وحدة الأطوال. ونتيجة لذلك نحصل على معادلة الذبذبات المستعرضة لعنصر من الوتر ، فى صورة تكاملية :

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, \rho(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (3)$$

وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفترض وجود واتصال المشتقات الثانية للدالة* $u(x, t)$. عندئذ تأخذ العلاقة (3) بعد تطبيق نظرية المتوسط مرتين الصورة :

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\rho(\xi^*)\Delta t\,\Delta x = \{T_0[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\}\Delta t\,\Delta x,$$

حيث

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ a } t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

وباختصار $\Delta x \Delta t$ فى الطرفين والانتقال إلى النهاية عندما $x_2 \to x_1, t_2 \to t_1$ نحصل على المعادلة التفاضلية للذبذبات المستعرضة للوتر :

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \qquad (4)$$

وفى حالة الكثافة الثابتة $\rho = \text{const}$ تكتب هذه المعادلة عادة على الصورة :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \qquad (5)$$

حيث

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \qquad (6)$$

هى كثافة القوة منسوبة إلى وحدة الكتل . وفى حالة انعدام القوة الخارجية نحصل على معادلة متجانسة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

أو

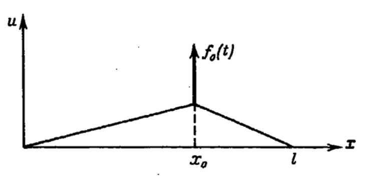
$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

تصف الذبذبات الحرة للوتر . وهذه المعادلة تعتبر أبسط مثال للمعادلة من النمط الزائدى .

* بافتراض قابلية الدالة للتفاضل مرتين نصطلح فعليا على أننا سندرس فقط تلك الدوال التى لها هذه الخاصية . وبذلك يرتبط مثل هذا الافتراض بتحديد نطاق الظواهر الفيزيائية محل البحث ولكنه لا يحوى فى حد ذاته إقرارا بعدم وجود دوال تحقق المعادلة التكاملية للذبذبات دون أن يكون لها مشتقات ثانية . فمثل هذه الدوال توجد ولها أهمية عملية كبيرة . انظر تفصيل ذلك فى البند ٢ ، فقرة ٧ .

وإذا أثرت فى النقطة x_0 (حيث $x_1 < x_0 < x_2$) قوة مركزة $f_0(t)$ (شكل ٢) فإن المعادلة (3) تكتب فى الصورة :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, d\xi - \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\, d\tau.$$



شكل ٢

وحيث إن سرعات نقط الوتر تكون محدودة فإن التكاملين فى الطرف الأيسر لهذه المتساوية يؤولان إلى الصفر عندما $x_1 \to x_0$ و $x_2 \to x_0$ وتأخذ المتساوية (3) الصورة :

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)]\, d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\, d\tau. \qquad (7)$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط واختصار Δt فى طرفى المتساوية الناتجة والانتقال بعد ذلك إلى النهاية عندما $t_2 \to t_1$ نحصل على :

$$u_x(x, t)\Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T_0} f_0(t).$$

ومن هنا يتضح أن المشتقات الأولى يحدث لها انفصال فى نقطة تأثير القوة المركزة ولا يكون للمعادلة التفاضلية معنى . وفى هذه النقطة يجب أن يتحقق شرطا الترافق :

$$\left.\begin{aligned} u(x_0 + 0, t) &= u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) &= -\frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

يعبر الشرط الأول منهما عن اتصال الوتر ويعبر الثانى عن مقدار كسر الوتر فى النقطة x_0 ، والذى يعتمد على $f_0(t)$ والشد T_0.

فقرة ٢ : معادلة الذبذبات الطولية للقضبان والأوتار. تكتب معادلات الذبذبات الطولية للوتر والقضيب والزنبرك فى صورة واحدة. ندرس قضيبا يقع على الجزء $(0, l)$ من المحور x. ويمكن وصف عملية الذبذبات الطولية فيه بدالة واحدة $u(x, t)$ تعبر فى اللحظة الزمنية t عن إزاحة النقطة التى كان إحداثيها الأفقى فى وضع الاتزان هو x * . وفى حالة الذبذبات الطولية تحدث هذه الإزاحة على امتداد القضيب. وسنفترض أثناء استنباط المعادلة ان الشد الناشئ خلال عملية الذبذبة يتبع قانون هوك.

نحسب الاستطالة النسبية لعنصر القضيب $(x, x+\Delta x)$ فى اللحظة t . واحداثيا نهايتى هذا العنصر فى اللحظة t هما

$$x+u(x, t),\ x+\Delta x+u(x+\Delta x, t),$$

والاستطالة النسبية تساوى

$$\frac{[\Delta x+u(x+\Delta x, t)-u(x, t)]-\Delta x}{\Delta x}=u_x(x+\theta\,\Delta x, t)$$
$$(0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

* يسمى المتغير الهندسى x المأخوذ هنا بمتغير لاجرانج. وفى حالة متغيرات لاجرانج تميز كل نقطة طبيعية للقضيب خلال كل العملية الفيزيائية بنفس الإحداثى الهندسى x . والنقطة الطبيعية التى كانت تشغل فى اللحظة الابتدائية (فى حالة الاتزان) الموضع x توجد فى أية لحظة تالية t فى النقطة ذات الإحداثى $X=x+u(x, t)$. وإذا ثبتنا نقطة هندسية ما A إحداثيها هو X فإن نقطا طبيعية مختلفة (ذات إحداثيات لاجرانج مختلفة x) ستوجد فى هذه النقطة فى اللحظات الزمنية المختلفة. وكثيرا ما تستخدم أيضا متغيرات أويلر X و t حيث X الإحداثى الهندسى. فإذا كانت $U(X, t)$ إزاحة النقطة ذات احداثى أويلر X فإن إحداثى لاجرانج يكون مساويا

$$x=X-U(X, t).$$

ونورد مثالا لاستخدام إحداثيات أويلر فى الفقرة ٦.

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نجد أن الاستطالة النسبية فى النقطة x تتحدد بالدالة $u_x(x, t)$. ووفقًا لقانون هوك يكون الشد $T(x, t)$ مساويا

$$T(x, t) = k(x)\, u_x(x, t), \tag{9}$$

حيث $k(x)$ معامل يونج (معامل المرونة) فى النقطة $x (k(x) > 0)$.

وبالاستعانة بالنظرية المتعلقة بالتغير فى كمية الحركة نحصل على المعادلة التكاملية للذبذبات

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, \rho(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\, u_x(x_2, \tau) - k(x_1)\, u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{10}$$

حيث $F(x, t)$ كثافة القوة الخارجية فى وحدة الأطوال.

نفرض وجود واتصال المشتقات الثانية للدالة $u(x, t)$. نطبق نظرية المتوسط ونجرى الانتقال إلى النهاية* عندما $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ و $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$ فنتوصل إلى المعادلة التفاضلية للذبذبات الطولية للقضيب**

$$[k(x)\, u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \tag{11}$$

وإذا كان القضيب متجانسًا $(k(x) = \text{const}, \ \rho = \text{const})$ فإن هذه المعادلة تكتب على الوجه التالى :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \tag{12}$$

حيث

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \tag{13}$$

---

* فيما بعد سنهمل التفاصيل المتعلقة بالانتقال إلى النهايات ، والتى سبق شرحها عند استنباط معادلة الذبذبات المستعرضة للوتر.

** يرتبط شرط صغر الذبذبات فى هذه الحالة بحدود صلاحية قانون هوك للتطبيق فقط . وفى الحالة العامة يكون $T = k(x, u_x)\, u_x$ فنحصل على معادلة شبه خطية

$$[k(x, u_x)\, u_x]_x = \rho u_{tt}\ F(x, t).$$

هى كثافة القوة منسوبة إلى وحدة الكتل .

فقرة ٣ : طاقة ذبذبات الوتر . نعين صيغة طاقة الذبذبات المستعرضة للوتر $E = K + U$ حيث K طاقة الحركة ، U طاقة الوضع . وعنصر الوتر dx الذى يتحرك بالسرعة $v = u_t$ يكون له طاقة حركة :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x)\, dx\, (u_t)^2 \qquad (m = \rho\, dx).$$

وطاقة حركة الوتر كله تساوى

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2\, dx. \tag{14}$$

وطاقة وضع الذبذبات المستعرضة للوتر ذى الشكل $u(x, t_0) = u_0(x)$ فى اللحظة الزمنية $t = t_0$ تساوى الشغل اللازم بذله لكى ينتقل الوتر من وضع الاتزان إلى الوضع $u_0(x)$. نفرض أن الدالة $u(x, t)$ تعطى المقطع الجانبى للوتر فى اللحظة t علمًا بأن

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, t_0) = u_0(x).$$

والعنصر dx تحت تأثير محصلة قوى الشد

$$T \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x} = T u_{xx}\, dx$$

يقطع خلال الفترة الزمنية dt المسافة $u_t(x, t) dt$. والشغل الذى يبذله الوتر كله خلال الفترة dt يساوى :

$$\left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t\, dx \right\} dt = \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt}\, dx \right\} dt =$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2\, dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt.$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى t من صفر حتى t_0 نحصل على

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2\, dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2\, dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt.$$

ومن السهل توضيح معنى الحد الأخير من الطرف الأيمن لهذه المتساوية . بالفعل فإن $T_0 u_x|_{x=0}$ هو مقدار الشد فى طرف الوتر $x = 0$ و $u_t(0, t)\,dt$ إزاحة هذا الطرف ، والتكامل

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \,|_{x=0}\, dt \tag{15}$$

هو عبارة عن الشغل اللازم بذله على إزاحة الطرف $x = 0$. وللحد المناظر للطرف $x = l$ معنى مماثل . وإذا كان طرفا الوتر مثبتين فإن الشغل على طرفى الوتر يكون مساويا الصفر (عند ذلك يكون $u(0, t) = 0$ و $u_t(0, t) = 0$) . وبالتالى لا يعتمد الشغل عند انتقال الوتر المثبت الطرفين من وضع الاتزان $u = 0$ إلى الوضع $u_0(x)$ على طريقة نقل الوتر إلى هذا الوضع ، ويكون مساويًا :

$$-\frac{1}{2}\int_0^{l} T_0 [u_0(x)]^2\, dx, \tag{16}$$

أى لطاقة وضع الوتر فى اللحظة $t = t_0$ باشارة مضادة . وبذلك تكون الطاقة الكلية للوتر مساوية

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{l} [T_0 (u_x)^2 + \rho(x)(u_t)^2]\, dx. \tag{17}$$

وبالمثل تمامًا يمكن الحصول على صيغة طاقة الوضع للذبذبات الطولية لقضيب . وجدير بالذكر أنه يمكن أيضًا الحصول عليها من صيغة طاقة وضع القضيب المرن

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0}\right)^2 l_0,$$

حيث l_0 الطول الابتدائى للقضيب ، و l طوله النهائى . ومن هنا ينتج مباشرة أن

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{l} k (u_x)^2\, dx.$$

فقرة ٤ : استنباط معادلة الذبذبات الكهربائية فى الموصلات . يتحدد مرور التيار الكهربائى فى موصل ذى بارامترات موزعة ، بقوة التيار i ، والجهد v

اللذين يعتبران دالتين فى موضع النقطة x والزمن t . وبتطبيق قانون أوم على جزء طوله dx يمكن أن نكتب أن فرق الجهد فى عنصر الموصل dx يساوى مجموع القوى الدافعة الكهربائية

$$-v_x\,dx = iR\,dx + i_t L\,dx, \tag{18}$$

حيث R و L هما المقاومة ومعامل الحث الذاتى لوحدة الأطوال .

وكمية الكهرباء المارة فى عنصر الموصل dx خلال الفترة الزمنية dt وهى :

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)]\,dt = -\,i_x\,dx\,dt, \tag{19}$$

تساوى مجموع كمية الكهرباء اللازمة لشحن العنصر dx والكمية الفاقدة نتيجة عدم عزل الموصل عزلاً تامًّا :

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)]\,dx + G\,dx \cdot v\,dt = (Cv_t + Gv)\,dx\,dt, \tag{20}$$

حيث C و G معامل السعة ومعامل التسرب لوحدة الأطوال ، علمًا بأننا نعتبر كمية الفاقد متناسبة مع الجهد فى نقطة الموصل المعنية .

ومن العلاقات (18) و (19) و (20) نحصل على مجموعة المعادلات :

$$\left.\begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv = 0,\\ v_x + Li_t + Ri = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

التى تسمى بمجموعة المعادلات التلغرافية* .

وللحصول على معادلة واحدة تحدد الدالة i نفاضل المعادلة الأولى من (21) بالنسبة إلى x والثانية بالنسبة إلى t مع ضربها فى C . وبطرح ما ينتج مع افتراض ثبات المعاملات نحصل على :

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

* تعتبر هذه المعادلات تقريبية فى إطار نظرية المجال الكهرومغناطيسى لأنها لا تأخذ فى الاعتبار الذبذبات الكهرومغناطيسية فى الوسط المحيط بالموصل .

وبالتعويض عن v_x بقيمتها من المعادلة الثانية من (21) نحصل على معادلة لقوة التيار

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\, i_t + GRi. \tag{22}$$

وبالمثل تكون صورة المعادلة للجهد

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)\, v_t + GRv. \tag{23}$$

وتسمى المعادلة (22) أو (23) بالمعادلة التلغرافية . وإذا أمكن إهمال ما يفقد خلال العازل وإذا كانت المقاومة صغيرة جدًّا $(G \cong R \cong 0)$ فإننا نتوصل إلى معادلة الذبذبات المعروفة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right). \tag{24}$$

الفقرة ٥ : الذبذبات المستعرضة لغشاء. الغشاء (membrane) هو شريط مستو أو طبقة رقيقة مستوية لا تقاوم الثنى والقص (shearing) . لنأخذ غشاء مشدودًا على منحنى مستو C . وسندرس الذبذبات المستعرضة للغشاء التى عندها تكون الإزاحة عمودية على مستوى الغشاء.

نفرض أن ds هو عنصر قوس منحنى ما مأخوذ على سطح الغشاء ويمر بالنقطة $M(x, y)$. ويؤثر على هذا العنصر شد يساوى $T\,ds$. ويقع المتجه T ، نتيجة لانعدام المقاومة للثنى وللقص ، فى المستوى المماس للسطح اللحظى للغشاء عموديًّا على العنصر ds . ويمكن البرهان على أن انعدام المقاومة للقص يؤدى إلى أن مقدار الشد لن يكون معتمدًا على اتجاه العنصر ds ، ومن ثم يكون متجه الشد $T = T(x, y, z)$ دالة فى x , y , t . وخواص المتجه T هذه تعتبر تعبيرًا رياضيًّا عن انعدام المقاومة للثنى وللقص.

وسندرس الذبذبات الصغيرة للغشاء ، بإهمال مربعات المشتقات الأولى u_x و u_y حيث تحدد الدالة $u(x, y, t)$ شكل الغشاء فى اللحظة الزمنية t . ومن هذا الافتراض ينتج مباشرة أن $T_h(x, y, t)$ وهو مسقط الشد على المستوى (x, y) يساوى القيمة المطلقة للشد. بالفعل فعند أى وضع للقوس ds لا تفوق الزاوية

γ' بين المتجه T والمستوى (x, y) الزاوية γ المحصورة بين العمودى على سطح الغشاء فى النقطة (x, y) وبين المحور z . ولذا فإن :

$$\cos\gamma' \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cong 1,$$

أى أن $\cos\gamma' \cong 1$ ، ويكون

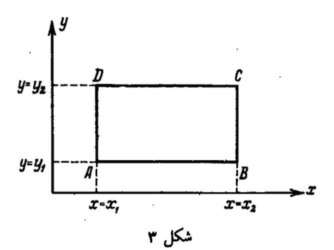
$$T_h(x, y, z, t) = T\cos\gamma' \cong T(x, y, z, t). \qquad (25)$$

ومن الواضح أن المركبة الرأسية للشد تكون مساوية

$$T_u = T\frac{\partial u}{\partial n}.$$

نأخذ على سطح الغشاء عنصر مساحة مسقطه على المستوى (x, y) هو المستطيل $ABCD$ الذى تكون أضلاعه موازية لمحاور الإحداثيات (شكل ٣) . وعلى هذا العنصر تؤثر قوة الشد التى تساوى :

$$T^* = \oint_{ABCD} T\,ds. \qquad (26)$$



شكل ٣

ونتيجة لانعدام الحركة على امتداد المحورين y , x يكون مسقطا T^* على هذين المحورين مساويين للصفر :

$$T_x^* = \int_B^C T(x_2, y, t)\,dy - \int_A^D T(x_1, y, t)\,dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\}\,dy = 0.$$

وبالمثل

$$T_y^* = \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\}\, dx = 0.$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط وأخذ الطابع الاختيارى للمساحة $ABCD$ فى الاعتبار نحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y_1, t) = T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) = T(x_2, y, t), \end{array}\right\} \quad (27)$$

أى أن الشد T لا يتغير عند تغير y , x ويمكن أن يعتمد فقط على t .

ومساحة أى عنصر فى الغشاء فى اللحظة الزمنية t تساوى فى تقريباتنا :

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\,dy \cong \iint dx\,dy. \quad (28)$$

وبالتالى لا تحدث استطالة للغشاء خلال عملية الذبذبة ومن ثم ينتج وفقًا لقانون هوك أن الشد لا يعتمد على الزمن. وبذلك أثبتنا أن الشد لا يعتمد على المتغيرات t , y, x :

$$T(x, y, t) = \text{const} = T_0. \quad (29)$$

ننتقل إلى استنباط معادلة ذبذبات الغشاء . نستعين بالنظرية المتعلقة بالتغير فى كمية الحركة . نفرض أن S_1 مسقط جزء ما من الغشاء على المستوى (x, y) ، وأن C_1 هى حدود S_1 . وبمساواة التغير فى كمية الحركة بدفع المركبات الرأسية لقوى الشد والقوة الخارجية المؤثرة بالكثافة $F(x, y, t)$ نحصل على معادلة ذبذبات الغشاء فى الصورة التكاملية

$$\iint_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)]\, \rho(x, y)\, dx\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} F\, dx\,dy\,dt, \quad (30)$$

حيث $\rho(x, y)$ الكثافة السطحية للغشاء ، $F(x, y, t)$ كثافة القوة الخارجية (فى وحدة المساحات) .

وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية نفرض أن للدالة $u(x, y, t)$ مشتقات ثانية متصلة . وبواسطة نظرية اوستروجرادسكى* يتحول التكامل المنحنى (على المنحنى) إلى تكامل سطحى (على السطح) :

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy,$$

ونتيجة لذلك تؤول المعادلة التكاملية للذبذبات إلى الصورة :

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} \{\rho u_{tt} - T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t)\}\, dx\, dy\, dt = 0.$$

وبالاستعانة بنظرية المتوسط وبالطابع الاختيارى للمساحة S_1 وللفترة الزمنية (t_1, t_2) نستنتج أن الصيغة داخل القوسين المزدوجين تطابق الصفر . وبذلك نصل إلى المعادلة التفاضلية لذبذبات الغشاء :

$$\rho u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t). \qquad (31)$$

ويمكن كتابة معادلة ذبذبات الغشاء المتجانسى فى الصورة

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \qquad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho}\right), \qquad (32)$$

حيث $f(x, y, t)$ كثافة القوة فى وحدة كتل الغشاء .

فقرة ٦ : معادلات الهيدروديناميكا والصوتيات . تستخدم الدوال $v_1(x, y, z, t)$ ، $v_2(x, y, z, t)$ ، $v_3(x, y, z, t)$ وهى مركبات متجه السرعة v فى النقطة (x, y, z) فى اللحظة t (متغيرات أويلر) بمثابة مميزات لحركة السائل . وتعتبر أيضًا الكثافة $\rho(x, y, z, t)$ والضغط $p(x, y, z, t)$ وكثافة القوى الخارجية $F(x, y, z, t)$ (إن وجدت) المنسوبة إلى وحدة الكتل ، مقادير مميزة لحركة السائل .

---

* انظر كتاب بيسكونوف «التفاضل والتكامل» طبعة دار «مير» ، الجزء الثانى ، ص ٤٠٣ .

ندرس حجمًا ما T من السائل ونحسب القوى المؤثرة عليه . باهمال قوى الاحتكاك الناشئة من اللزوجة ، أى بدراسة سائل مثالى ، نحصل على صيغة لمحصلة قوى الضغط فى صورة تكامل سطحى :

$$-\iint_S pn\,dS, \tag{33}$$

حيث S سطح الحجم T ، n الوحدة الاتجاهية للعمودى الخارجى . وتعطينا علاقة أوستروجرادسكى* :

$$-\iint_S pn\,dS = -\iiint_T \operatorname{grad} p\,d\tau. \tag{34}$$

وعند حساب عجلة نقطة ما من نقط السائل لا بد من الأخذ فى الاعتبار حركة النقطة نفسها . نفرض أن $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ معادلة مسار هذه النقطة . نحسب مشتقة السرعة بالزمن

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\dot{z} =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v_1 + \frac{\partial v}{\partial y}v_2 + \frac{\partial v}{\partial z}v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\,v,$$

حيث

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

وتسمى مثل هذه المشتقة بالزمن التى تأخذ فى الاعتبار حركة جسيم الوسط (مادته) بالمشتقة المادية . وتعبر معادلة حركة السائل عن الارتباط المعتاد بين عجلة الجسيمات والقوى المؤثرة عليها

$$\iiint_T \rho\frac{dv}{dt}\,d\tau = -\iiint_T \operatorname{grad} p\,d\tau + \iiint_T \rho F\,d\tau, \tag{35}$$

---

* بالفعل حيث إن $pn = p\cos(n,x)i + p\cos(n,y)j + p\cos(n,z)k$ حيث i, j, k متجهات الوحدة فى مجموعة الإحداثيات (x, y, z) فإن

$$\iint_S p\cos(n,\ x)\,dx = \iiint_T \frac{\partial p}{\partial x}\,d\tau$$

حيث التكامل الأخير هو عبارة عن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الحجم T . ومن هنا ووفقًا للطابع الاختيارى للحجم T نحصل على معادلة حركة السائل المثالى فى صورة أويلر :

$$v_t + (v\nabla)\, v = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p + F. \qquad (36)$$

ننتقل إلى استنباط معادلة الاتصال . إذا لم يوجد داخل T أية منابع أو مصارف فإن التغير فى وحدة الزمن لكمية السائل المحصورة داخل T يساوى الدفق خلال حدود S

$$\frac{d}{dt}\iiint_T \rho\, dt = -\iint_S \rho\, vn\, dS. \qquad (37)$$

ويعطى تحويل التكامل السطحى إلى حجمى :

$$\iiint_T \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho v\right) d\tau = 0.$$

وحيث إن هذه المتساوية صحيحة لأية أحجام مهما كانت صغيرة فنتتج من هنا معادلة الاتصال :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0$$

أو

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\,\mathrm{grad}\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\, v = 0. \qquad (38)$$

وينبغى إضافة معادلة الديناميكا الحرارية لحالة السائل إلى المعادلتين (36) و (38) ، وسنأخذها هنا فى الصورة :

$$p = f(\rho).$$

وبالتالى نحصل على مجموعة من خمس معادلات فى خمس دوال مجهولة v_x, v_y, v_z, p ، ρ . وإذا كانت معادلة الحالة تحتوى على درجة الحرارة لكان يجب أيضًا إضافة معادلة الانتقال الحرارى (انظر الملحق الرابع) . وبذلك تكون مجموعة المعادلات

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\, v = F - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p, \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0, \\ &p = f(\rho) \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

عبارة عن مجموعة مغلقة لمعادلات الهيدروديناميكا .

نطبق معادلات الهيدروديناميكا على عملية انتشار الصوت فى الغاز . نصطلح على الافتراضات التالية : ١ ـ تنعدم القوى الخارجية ؛ ٢ ـ عملية انتشار الصوت هى عملية ادياباتية ولذا فمعادلة الحالة هى عبارة عن معادلة بواسون الاديباتية

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \left(\gamma=\frac{c_p}{c_v}\right),$$

حيث ρ_0 و p_0 الكثافة الابتدائية والضغط الابتدائى ، c_p السعة الحرارية عند ثبات الضغط ، c_v السعة الحرارية عند ثبات الحجم ؛ ٣ ـ ذبذبات الغاز صغيرة فيمكن إهمال القوى العليا للسرعات وتدرجات (gradients) السرعات والتغيرات فى الكثافة .

نسمى بتكثيف الغاز المقدار $s(x,y,z,t)$ الذى يساوى التغير النسبى فى الكثافة

$$s(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}, \tag{40}$$

ومنها

$$\rho=\rho_0(1+s). \tag{41}$$

وتأخذ معادلات الهيدروديناميكا بالافتراضات السابقة الصورة :

$$\left.\begin{aligned} v_t&=-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p,\\ \rho_t+\rho_0 &\operatorname{div} v=0,\\ p=p_0(1+s)^{\gamma}&\cong p_0(1+\gamma s), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

وذلك لأن

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\frac{1}{\rho_0}(1-s+\ \ldots)\operatorname{grad} p=\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p+\ldots,$$
$$\operatorname{div}\rho v=v\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div} v=\rho_0\operatorname{div} v+\ldots,$$

حيث ترمز النقط إلى الحدود من الرتبة الثانية أو أعلى فى الصغر . وبالرمز إلى $a^2=\gamma p_0/\rho_0$ نكتب المجموعة (42) فى الصورة :

$$\left.\begin{aligned} v_t&=-a^2\operatorname{grad} s,\\ s_t&+\operatorname{div} v=0. \end{aligned}\right\} \tag{42'}$$

وبالتأثير على المعادلة الأولى من (42′) بمؤثر التباعد وتغيير ترتيب التفاضل نحصل على :

$$\operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v=-a^2\operatorname{div}(\operatorname{grad} s)=-a^2\nabla^2 s=-a^2\Delta s,$$

حيث

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

هو مؤثر لابلاس . وبالاستعانة بالمعادلة الثانية من (42′) نحصل على معادلة الذبذبات

$$\Delta s=\frac{1}{a^2}s_{tt} \tag{43}$$

أو

$$a^2(s_{xx}+s_{yy}+s_{zz})=s_{tt}.$$

ومن هنا ومن (40) نحصل على معادلة للكثافة

$$a^2(\rho_{xx}+\rho_{yy}+\rho_{zz})=\rho_{tt}. \tag{43'}$$

والمعادلتان (43) و (43′) هما معادلتان للذبذبات . والآن ندخل مفهوم جهد السرعات ونوضح أنه يحقق نفس معادلة الذبذبات (43) مثله مثل التكثيف . من المعادلة

$$v_t=-a^2\operatorname{grad} s$$

ينتج أن

$$v(x, y, z, t)=v(x, y, z, 0)-a^2\operatorname{grad}\left(\int_0^t s\,dt\right), \tag{44}$$

حيث $v(x, y, z, 0)$ التوزيع الابتدائي للسرعات . وإذا كان لمجال السرعات في اللحظة الابتدائية الجهد

$$v|_{t=0}=-\operatorname{grad} f(x, y, z), \tag{45}$$

فتتحقق العلاقة التالية :

$$v = -\operatorname{grad}\left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\, dt\right] = -\operatorname{grad} U, \qquad (46)$$

التى تعنى وجود جهد السرعات $U(x, y, z, t)$. ومعرفة جهد السرعات يكون كافيًا لوصف كل عملية الحركة*

$$\left.\begin{aligned} v &= -\operatorname{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

وبالتعويض بهذه القيم فى معادلة الاتصال

$$s_t + \operatorname{div} v = 0,$$

نحصل على معادلة الذبذبات للجهد

$$a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

أو

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \qquad (48)$$

ويمكن أيضًا الحصول على معادلة ذبذبات على الصورة (48). لكل من الضغط p والسرعة v . والمعادلة (48) كثيرًا ما تسمى بمعادلة الصوتيات .

ولحل المسائل فى الحالة الثنائية الأبعاد (فى المستوى) أو أحادية البعد يجب التعويض فى المعادلة (48) عن مؤثر لابلاس بالمؤثر $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ أو $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. ويكون للثابت $a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ مقياس السرعة ، ويكون كما سنوضح ذلك فى البند ٢ هو عبارة عن سرعة انتشار الصوت .

---

* من العلاقة (46) يتضح أن الجهد U معرف بدقة حد يعتبر دالة اختيارية فى t . ومن المعادلة $v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$ والمعادلة (46) ينتج أن $\left(s - \frac{1}{a^2} U_t\right) = 0$ أى أن $s = \frac{1}{a^2} U_t$ ، وذلك عند التقنين المناسب للجهد U .

نحسب سرعة الصوت فى الهواء عند الضغط الجوى العادى . وفى هذه الحالة $\gamma = 7/5$ ، $\rho_0 = 0.001293\ \mathrm{g/cm^3}$ ، $p_0 = 1.033\ \mathrm{kg/cm^2}$ ، وبالتالى

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336\ \ \mathrm{m/s.}$$

وفى حالة ذبذبة الغاز فى منطقة محدودة يجب أن تعطى على الحدود شروط حدية معينة . وإذا كانت الحدود عبارة عن جدار غير نفاذ صلب فإن المركبة العمودية للسرعة تكون مساوية للصفر مما يؤدى إلى الشرط :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \quad \text{أو} \quad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \tag{49}$$

فقرة ٧ : الشروط الحدية والشروط الابتدائية . لا بد قبل أى شىء عند الوصف الرياضى للعملية الفيزيائية من صياغة المسألة أى صياغة الشروط الكافية لتحديد العملية تحديدًا أحادى القيمة .

والمعادلات التفاضلية العادية وبالأولى الجزئية يكون لها بوجه عام مجمل لانهائى من الحلول . ولذا فعندما تؤول المسألة الفيزيائية إلى معادلة تفاضلية جزئية لا بد لتمييز العملية تمييزًا أحادى القيمة من إضافة شروط إضافية إلى المعادلة .

وفى حالة المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية يمكن تحديد المسألة بالشروط الابتدائية أى بإعطاء قيمتى الدالة ومشتقتها الأولى عند قيمة المتغير المستقل « الابتدائية » (مسألة كوشى) . كما تصادفنا صور أخرى للشروط الإضافية ، على سبيل المثال عندما تعطى قيمتا الدالة فى نقطتين (مسألة منحنى السلسلة) . وللمعادلة التفاضلية الجزئية يمكن أن توجد أيضًا صور مختلفة للشروط الإضافية .

ندرس فى البداية المسألة المبسطة عن الذبذبات المستعرضة لوتر مثبت الطرفين . فى هذه المسألة تعطى الدالة $u(x, t)$ انحراف الوتر عن المحور x . وإذا كان طرفا الوتر $0 \leqslant x \leqslant l$ مثبتين ، فيجب أن تتحقق « الشروط الحدية » :

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{50}$$

وحيث إن عملية ذبذبة الوتر تعتمد على صورته الابتدائية (شكله فى اللحظة

الابتدائية) وتوزيع السرعات فى اللحظة الابتدائية فيجب إعطاء «الشروط الابتدائية» :

$$\left.\begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

وبذلك تتكون الشروط الإضافية من الشروط الحدية والابتدائية حيث $\varphi(x), \psi(x)$ دوال فى النقطة معطاة (أى دوال فى إحداثى النقطة) . وفيما بعد سنوضح أن هذه الشروط تحدد تماما حل معادلة ذبذبات الوتر

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \qquad (52)$$

وإذا كان طرفا الوتر يتحركان بقانون حركة معطى فإن الشروط الحدية (50) تأخذ الصورة :

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (50')$$

حيث $\mu_2(t)$, $\mu_1(t)$ دوال معطاة فى الزمن t . وبالمثل تصاغ مسألة الذبذبات الطولية لوتر أو زنبرك .

وهناك أنواع أخرى محتملة للشروط الحدية . ندرس على سبيل المثال مسألة الذبذبات الطولية لزنبرك أحد طرفيه مثبت (نقطة التعليق) ، وطرفه الآخر حر . وقانون حركة الطرف الحر غير معطى وكثيرا ما يكون هو بعينه الدالة المطلوبة .

وفى نقطة التعليق $x = 0$ يكون الانحراف

$$u(0, t) = 0;$$

وفى الطرف الحر $x = l$ فإن الشد فى الزنبرك

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} \qquad (53)$$

يكون مساويا للصفر (تنعدم القوى الخارجية) ، ومن ثم تكون الصياغة الرياضية للشرط المفروض بالنسبة إلى الطرف الحر على الصورة :

$$u_x(l, t) = 0.$$

وإذا كان الطرف $x = 0$ يتحرك بقانون معلوم $\mu(t)$ ، وعند $x = l$ معطاة القوة $\bar{\nu}(t)$ ، فان

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t), \qquad \left(\nu(t) = \frac{1}{k}\bar{\nu}(t)\right).$$

ويعتبر شائعًا أيضًا شرط التثبيت المرن ، وليكن مثلاً للطرف $x = l$

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t)$$

أو

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \quad \left(h = \frac{\alpha}{k}\right). \tag{54}$$

وبوجود هذا الشرط يمكن أن يتحرك الطرف $x = l$ ولكن القوة المرنة للتثبيت تسبب نشوء شد فى هذا الطرف يحاول إعادة الطرف المزاح إلى وضعه الأولى . وهذه القوة تكون وفقًا لقانون هوك متناسبة مع الإزاحة $u(l, t)$. ومعامل التناسب α يسمى بمعامل صلابة (كزازة)التثبيت .

وإذا كانت النقطة (المجموعة) التى يتحقق فيها التثبيت المرن تتحرك ويعطى انحرافها عن الوضع الابتدائى بالدالة $\theta(t)$ فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة :

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \tag{55}$$

وشرط التثبيت المرن فى الطرف الأيسر $x = 0$ يكون على الصورة

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h > 0$$

(ويمكن ، شكليًا ، اعتبار أن (55) تتحقق أيضًا عندما $x = 0$ ولكن $h < 0$) . وينبغى الإشارة إلى إنه فى حالة التثبيت الصلب (α كبيرة) ، عندما تسبب الإزاحات حتى الصغيرة منها نشوء شد كبير ، يتحول الشرط الحدى (55) إلى الشرط $(\alpha = \infty)$ $u(l, t) = \mu(t)$ عند $\mu(t) = \theta(t)$. وفى حالة التثبيت اللين (α صغيرة) عندما لاتتسبب الإزاحات الكبيرة إلا فى نشوء شد ضعيف يتحول الشرط الحدى إلى شرط الطرف الحر

$$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0).$$

وفيما سيلي سنتحدث عن ثلاثة أنواع أساسية من الشروط الحدية :

الشرط الحدى من النوع الأول $u(0,t)=\mu(t)$: نظام حركة معطى ؛

الشرط الحدى من النوع الثانى $u_x(0,t)=\nu(t)$: قوة معطاة ؛

الشرط الحدى من النوع الثالث $u_x(0,t)=h[u(0,t)-\theta(t)]$: تثبيت مرن .

وبالمثل تعطى الشروط الحدية على الطرف الثانى $x=l$. وإذا كانت الدوال المعطاة فى الأطراف اليمنى $\mu(t)$ أو $\nu(t)$ أو $\theta(t)$ مساوية للصفر فإن الشروط الحدية تسمى متجانسة . وبائتلاف الأنواع المختلفة المذكورة من الشروط الحدية نحصل على ستة أنواع من أبسط المسائل الحدية .

ويتحقق شرط حدى أكثر تعقيدًا فى حالة التثبيت المرن الذى لا يخضع لقانون هوك عندما يكون الشد فى طرف الوتر دالة لاخطية فى الإزاحة $u(l,t)$ بحيث إن

$$u_x(l,\ t)=\frac{l}{k}F[u(l,\ t)]. \tag{56}$$

وهذا الشرط الحدى يعتبر بخلاف الشروط السابق دراستها شرطًا لاخطيًّا . وبعد ذلك فمن المحتمل أيضًا وجود علاقات معينة بين الإزاحات والشد فى أطراف المجموعة المختلفة . فعلى سبيل المثال فى مسائل ذبذبة الحلقة عندما يكون $x=l$ و $x=0$ هما عبارة عن نقطة فيزيائية واحدة تأخذ الشروط الحدية الصورة :

$$u(l,\ t)=u(0,\ t);\quad u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t), \tag{57}$$

أى إنها تؤول إلى طلب اتصال u و u_x . ويمكن أيضًا أن تدخل المشتقات بالنسبة إلى t فى الشروط الحدية . وإذا كان طرف الزنبرك يعانى من مقاومة الوسط التى تتناسب مع سرعة حركته (ثبت فى طرف الزنبرك لوح مستواه عمودى على محور الزنبرك) فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة :

$$ku_x(l,\ t)=-\alpha u_t(l,\ t). \tag{58}$$

وإذا علق ثقل كتلته m فى طرف الزنبرك $x=l$ فإنه عند $x=l$ يجب أن يتحقق الشرط

$$mu_{tt}(l,\ t)=-ku_x(l,\ t)+mg. \tag{59}$$

وفى حالة الذبذبات المستعرضة للوتر تكتب جميع هذه الشروط الحدية على نفس الصورة مع التعويض عن k بـ T_0 .

وفى المستقبل سنكتفى بدراسة الثلاثة أنواع البسيطة من الشروط الحدية ، وذلك بإجراء العرض الأساسى على مثال النوع الأول من الشروط الحدية مع ذكر الخصائص المتعلقة بالشروط الثانية والثالثة .

نصيغ المسألة الحدية الأولى للمعادلة (5) :

عين الدالة $u(x, t)$ المعرفة فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant l$ ، $t \geqslant 0$ والتى تحقق المعادلة :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{للقيم} \quad 0 < x < l, \; t > 0$$

والشروط الحدية

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \qquad (t > 0) \tag{60'}$$

والشروط الابتدائية

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \qquad (0 < x < l). \tag{60''}$$

وبالمثل تصاغ المسألة للمعادلة (11) .

وإذا أخذت على الطرفين الشروط الحدية من النوع الثانى أو الثالث فإن المسألتين المناظرتين تسميان بالمسألة الحدية الثانية والمسألة الحدية الثالثة . وإذا كانت الشروط الحدية عند $x = 0$ و $x = l$ من نوعين مختلفين فإن مثل هذه المسائل تسمى بالمسائل الحدية المختلطة ، ولن نجرى لها تصنيفًا مفصلاً .

وننتقل الآن إلى دراسة الحالات النهائية للمسألة المصاغة . إن تأثير الشروط الحدية فى النقطة M_0 البعيدة بعدًا كافيًا عن الحدود التى تعطى عليها هذه الشروط يحدث بعد فترة زمنية كبيرة كبرًا كافيًا .

وإذا كان ما يهمنا هو حدوث الظاهرة خلال فترة زمنية صغيرة عندما لا يكون

تأثير الحدود جوهريًا بعد فإنه يمكن بدلاً من المسألة الكاملة دراسة المسألة النهائية بالشروط الابتدائية لمنطقة لانهائية :

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{لقيم} \quad -\infty < x < \infty \text{ ، } t > 0$$

بالشروط الابتدائية

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{عندما} \quad -\infty < x < \infty \tag{61}$$

وكثيرًا ما تسمى هذه المسألة بمسألة كوشى .

أما إذا كنا ندرس الظاهرة قرب أحد الحدود ولا يكون لتأثير النظام الحدى على الحدود الأخرى قيمة جوهرية خلال الفترة الزمنية التى تهمنا فإننا نصل إلى صياغة للمسألة على مستقيم نصف محدود (نصف مستقيم لانهائى) $0 \leqslant x < \infty$ عندما تكون معطاة فضلاً عن المعادلة الشروط الإضافية التالية :

$$\left.\begin{aligned} &u(0, t) = \mu(t), \qquad t \geqslant 0, \\ &\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

وطابع الظاهرة فى اللحظات الزمنية البعيدة بشكل كاف عن اللحظة الابتدائية $t = 0$ يتحدد تحديدًا تامًا بالشروط الحدية لأن تأثير الشروط الابتدائية يضعف مع مرور الزمن بفضل الاحتكاك الموجود فى أية مجموعة حقيقية* .

ويصادفنا مثل هذا النوع من المسائل بكثرة ، خاصة عندما تضطرب المجموعة بنظام حدى دورى يؤثر زمنا طويلاً . ومثل هذه المسائل «بدون شروط ابتدائية» (فى نظام مستقر زمنيًا) تصاغ على الوجه التالى :

---

* معادلة الذبذبات مع الأخذ فى الاعتبار الاحتكاك المتناسب مع السرعة تكون على الصورة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \qquad (\alpha > 0).$$

انظر بالتفصيل صياغة المسألة بدون شروط ابتدائية عندما $\alpha = 0$ فى فقرة ٧ ، بند ٣ .

عين حل المعادلة المدروسة للقيم $0 \leqslant x \leqslant l$ و $-\infty < t$ بالشروط الحدية

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

وبالمثل تصاغ المسألة بلا شروط ابتدائية للمستقيم نصف المحدود.

وفيما بعد سندرس علاوة على المسائل الحدية الأساسية المسائل النهائية أيضًا :

١ ـ المسائل فى المنطقة اللانهائية عندما يكون أحد الحدود أو كلاهما فى المالانهاية.

٢ ـ المسائل بلا شروط ابتدائية (فى نظام مستقر زمنيًّا) عندما تدرس الحلول المعرفة خلال فترة زمنية لانهائية.

فقرة ٨ : اختصار المسألة العامة. عند حل مسألة معقدة يكون من الطبيعى أن نحاول تحويل هذا الحل إلى حل مسائل أكثر سهولة. ولهذا الغرض نعبر عن حل المسألة الحدية العامة فى صورة مجموع حلول عدة مسائل حدية خاصة.

نفرض أن $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $u_i(x, t)$ دوال تحقق المعادلات

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x, t) \qquad (64)$$

عندما $0 < x < l$ ، $t > 0$ ، وتحقق الشروط الإضافية

$$\left.\begin{aligned} u_i(0, t) &= \mu_1^i(t), \\ u_i(l, t) &= \mu_2^i(t); \\ u_i(x, 0) &= \varphi^i(x), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) &= \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

ومن الواضح أنه يتحقق تراكب (superposition) الحلول أى أن الدالة

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x, t) \qquad (66)$$

تحقق معادلة مماثلة ذات طرف أيمن

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x, t) \qquad (67)$$

وتحقق الشروط الإضافية التى أطرافها اليمنى هى الدوال

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \quad (k=1,\ 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

وواضح أن مبدأ التراكب المذكور لا يسرى فقط على المسألة المعطاة بل إنه يسرى أيضًا على أية معادلة خطية ذات شروط إضافية خطية. ونستعين بهذه الخاصية كثيرًا فى المستقبل.

وحل المسألة الحدية العامة

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \\ &(0<x<l,\ t>0); \\ u(0,\ t) &= \mu_1(t), \\ u(l,\ t) &= \mu_2(t); \\ u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

يمكن التعبير عنه فى صورة المجموع

$$u(x,\ t) = u_1(x,\ t) + u_2(x,\ t) + u_3(x,\ t) + u_4(x,\ t), \tag{70}$$

حيث $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ حلول المسائل الحدية الخاصة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \\ \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x,\ t), \end{aligned} \qquad (0<x<l,\ t>0),$$

$$\left.\begin{array}{llll} u_1(0,\ t)=0, & u_2(0,\ t)=\mu_1(t), & u_3(0,\ t)=0, & u_4(0,\ t)=0, \\ u_1(l,\ t)=0; & u_2(l,\ t)=0; & u_3(l,\ t)=\mu_2(t); & u_4(l,\ t)=0; \\ u_1(x,\ 0)=\varphi(x), & u_2(x,\ 0)=0, & u_3(x,\ 0)=0, & u_4(x,\ 0)=0, \\ u_{1_t}(x,\ 0)=\psi(x), & u_{2_t}(x,\ 0)=0; & u_{3_t}(x,\ 0)=0; & u_{4_t}(x,\ 0)=0. \end{array}\right\} \tag{71}$$

وسنكتفى هنا بهذا الاختصار الشكلى لكى نميز المسائل الحدية الخاصة التى تشكل المراحل الأساسية فى حل المسألة العامة . ويمكن إجراء اختصار مماثل للحالات النهائية للمسألة الحدية العامة أيضًا .

فقرة ٩ : صياغة المسائل الحدية فى حالة تعدد المتغيرات . درسنا بالتفصيل صياغة المسائل الحدية فى حالة المتغير الهندسى المستقل الواحد x (والزمن t) . وإذا كان عدد المتغيرات الهندسية $n > 1$ (مثلاً $n = 3$) فإن المسألة الحدية الأولى تصاغ بطريقة مماثلة تمامًا :

يطلب تعيين الدالة $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ المعرفة عند $t \geqslant 0$ داخل المنطقة المعطاة T بالحدود Σ ، والتى تحقق عند $t > 0$ داخل T المعادلة

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t) \quad (M(x, y, z) \in T, \ t > 0), \tag{72}$$

وتحقق على Σ الشرط الحدى

$$u|_{\Sigma} = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in \Sigma, \ t \geqslant 0) \tag{73}$$

($\mu(x, y, z, t)$ دالة معطاة على Σ) وتحقق الشروط الابتدائية

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= \varphi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M) \end{aligned}\right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \tag{74}$$

ويجرى تحليل المسألة الحدية العامة إلى عدة مسائل بسيطة بطريقة مماثلة لما سبق . ونشير إلى أنه من الممكن أيضًا صياغة المسائل الحدية النهائية لمنطقة لانهائية أو لنصف الفراغ ، .. الخ .

فقرة ١٠ : نظرية الوحدانية . عند حل المسائل الحدية :

١ ـ ينبغى التأكد من أن الشروط الإضافية تكون كافية للحصول على حل أحادى القيمة ، ونتوصل إلى ذلك بإثبات نظرية الوحدانية .

٢ ـ ينبغى التأكد من أن الشروط الإضافية لا تجاوز تحديد المسألة أى التأكد من عدم وجود شروط غير متوافقة أو متناقضة فيما بينها ، ويتم التوصل إلى ذلك

بإثبات نظرية الوجود. وعادة يرتبط إثبات وجود الحل ارتباطًا وثيقًا بطريقة تعيين الحل.

وفى هذه الفقرة سنثبت نظرية الوحدانية التالية:

من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x,t)$ ، معرفة فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant l$ ، $t \geqslant 0$ وتحقق المعادلة

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,\ t) \qquad (\rho(x) > 0,\ k(x) > 0),$$
$$0 < x < l, \quad t > 0, \tag{75}$$

والشروط الابتدائية والحدية

$$\left.\begin{array}{ll} u(x,\ 0) = \varphi(x), & u_t(x,\ 0) = \psi(x), \\ u(0,\ t) = \mu_1(t), & u(l,\ t) = \mu_2(t), \end{array}\right\} \tag{76}$$

إذا تحققت الشروط:

١ ـ الدالة $u(x,t)$ والمشتقات التى تدخل فى المعادلة (75) وكذلك المشتقة u_{xt} تكون دوال متصلة فى الفترة المغلقة $l \geqslant x \geqslant 0$ عندما $0 \geqslant t$؛

٢ ـ المعاملان $\rho(x)$ و $k(x)$ متصلان فى الفترة المغلقة $l \geqslant x \geqslant 0$.

نفرض أنه يوجد حلان للمسألة المدروسة:

$$u_1(x,\ t), \quad u_2(x,\ t),$$

وندرس الفرق $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

ومن الواضح أن الدالة $v(x,t)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{77}$$

والشروط الإضافية المتجانسة:

$$\left.\begin{array}{ll} v(x,\ 0) = 0, & v(0,\ t) = 0, \\ v_t(x,\ 0) = 0; & v(l,\ t) = 0, \end{array}\right\} \tag{78}$$

وكذلك الشرط ١ من النظرية .

نثبت أن الدالة $v(x,t)$ تساوى الصفر بالتطابق .

ندرس الدالة

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \{k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\}\,dx \tag{79}$$

ونوضح أنها لا تعتمد على t . والمعنى الفيزيائى للدالة $E(t)$ واضح : فهى الطاقة الكلية للوتر فى اللحظة الزمنية t . نفاضل $E(t)$ بالنسبة إلى t ، بالقيام عند ذلك بعملية التفاضل تحت علامة التكامل*

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l (kv_xv_{xt}+\rho v_tv_{tt})\,dx.$$

وبتكامل الحد الأول من الطرف الأيمن بالتجزئة نحصل على :

$$\int_0^l kv_xv_{xt}\,dx=[kv_xv_t]_0^l-\int_0^l v_t(kv_x)_x\,dx. \tag{80}$$

والتعويض بالنهايتين فى الحد الأول من هذه المتساوية يعطينا صفرًا (من $v(0,t)=0$ ينتج أن $v_t(0,t)=0$ وبالمثل فى حالة $x=l$) . ومن هنا ينتج أن

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l [\rho v_tv_{tt}-v_t(kv_x)_x]\,dx=\int_0^l v_t[\rho v_{tt}-(kv_x)_x]\,dx=0,$$

أى أن $E(t)=\text{const}$. وبالأخذ فى الاعتبار الشروط الابتدائية ، نحصل على :

$$E(t)=\text{const}=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l [k(v_x)^2+\rho(v_t)^2]_{t=0}\,dx=0, \tag{81}$$

* لإجراء عملية التفاضل تحت علامة التكامل يكفى أن تكون الصيغة المكاملة الناتجة عند ذلك متصلة فى الفترة المغلقة $0\leqslant x\leqslant l$ عند $t\geqslant 0$. وهذا الشرط يتحقق فى حالتنا لأن الدالة $v(x,t)$ تحقق الشرط ١ من النظرية ، و $k(x)$ ، $\rho(x)$ تحققان الشرط ٢ .

حيث إن

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

وبالاستعانة بالعلاقة (81) وكون ρ و k موجبين نستنتج أن :

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$

ومن هنا تنتج المتطابقة

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \tag{82}$$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية نجد أن

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

وبذلك أثبتنا أن

$$v(x, t) \equiv 0. \tag{83}$$

وبالتالى فإذا وجدت دالتان $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ تحققان جميع شروط النظرية فإن $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

وللمسألة الحدية الثانية الدالة $v = u_1 - u_2$ تحقق الشروط الحدية

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \tag{84}$$

والتعويض بالنهايتين فى الحد الأول من العلاقة (80) يعطينا أيضًا فى هذه الحالة صفرًا . ويظل القسم الباقى من إثبات النظرية بلا تغير .

وللمسألة الحدية الثالثة يتطلب الإثبات بعض التغييرات ـ بدراسة حلين u_1 و u_2 كما سبق نحصل للفرق بينهما $v(x, t) = u_1 - u_2$ على المعادلة (77) والشروط الحدية

$$\left.\begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) = 0 \quad (h_1 \geqslant 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) = 0 \quad (h_2 \geqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

نعبر عن التعويض بالنهايتين فى (80) فى الصورة

$$[kv_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[h_2 v^2(l,\ t) + h_1 v^2(0,\ t)].$$

وبتكامل $\frac{dE}{dt}$ بالنهايتين من صفر إلى t نحصل على :

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x]\, dx\, dt -$$

$$-\frac{k}{2}\{h_2[v^2(l,\ t) - v^2(l,\ 0)] + h_1[v^2(0,\ t) - v^2(0,\ 0)]\},$$

ومن هنا ينتج وفقًا للمعادلة والشروط الابتدائية :

$$E(t) = -\frac{k}{2}[h_2 v^2(l,\ t) + h_1 v^2(0,\ t)] \leqslant 0. \qquad (86)$$

وحيث إن $E(t) \geqslant 0$ نظرًا لأن الدالة المكاملة غير سالبة فإنه

$$E(t) \equiv 0, \qquad (87)$$

وبالتالى فإنه

$$v(x,\ t) \equiv 0. \qquad (88)$$

وطريقة إثبات نظرية الوحدانية المعروضة هنا تستند على الاستعانة بصيغة الطاقة الكلية وهى شائعة التطبيق عند إثبات نظريات الوحدانية فى مختلف فروع الفيزياء الرياضية، على سبيل المثال فى نظرية المجالات الكهرومغناطيسية ونظرية المرونة والهيدروديناميكا .

وسيرد إثبات وحدانية المسائل الحدية الأخرى (مسألة كوشى والمسألة بلا شروط ابتدائية) فيما بعد كل فى مكانه المناسب .

مسائل :

١ ـ اثبت أن معادلة الذبذبات الالتوائية الصغيرة لقضيب تكون على الصورة

$$\Theta_{tt} = a^2 \Theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}},$$

حيث Θ هى زاوية دوران مقطع القضيب ذى الإحداثى الأفقى x ، G معامل القص ، J عزم القصور الذاتى القطبى للمقطع العرضى ، k عزم القصور الذاتى لوحدة أطوال القضيب . وضح التفسير الفيزيائى للشروط الحدية من الأنواع الأول والثانى والثالث لهذه المعادلة .

٢ ـ سلك متجانس مطلق القابلية للانثناء مثبت عند أحد طرفيه وموجود فى وضع الاتزان الرأسى تحت تأثير وزنه . استنبط معادلة الذبذبات الصغيرة للسلك .

الجواب : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad a^2 = g$ ،

حيث $u(x, t)$ إزاحة النقطة ، l طول السلك ، g عجلة الجاذبية .

٣ ـ سلك متجانس ثقيل طوله l مثبت عند طرفه العلوى $(x = 0)$ بمحور رأسى . ويدور السلك حول هذا المحور بسرعة زاوية ثابتة ω . استنبط معادلة الذبذبات الصغيرة للسلك حول وضع اتزانه الرأسى .

الجواب : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u$ ، حيث $a^2 = g$.

٤ ـ استنبط معادلة الذبذبات المستعرضة فى الوسط الذى تتناسب مقاومته مع الدرجة الأولى للسرعة .

الجواب : $v_{tt} = a^2 v_{xx} - h^2 v_t, \; a^2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$.

٥ ـ استنبط الشروط الحدية لمعادلة الذبذبات الطولية لقضيب مرن (زنبرك) فى تلك الحالة عندما يكون الطرف العلوى للقضيب مثبتًا تثبيتًا صلبًا وبالطرف السفلى علق ثقل P ، إذا :

(أ) اعتبر وضع الاتزان هو حالة القضيب المجهدة تحت تأثير الثقل الثابت P المعلق بالطرف السفلى (الاستطالة الاستاتيكية) ؛

(ب) اعتبر وضع الاتزان هو حالة القضيب غير المجهدة (على سبيل المثال ، فى اللحظة الابتدائية يسحب من تحت الثقل المسند فيبدأ الثقل فى العمل على استطالة القضيب) .

٦ ـ اكتب المعادلة والشروط التى تحدد عملية الذبذبات الالتوائية لقضيب ثبتت بكرتان فى طرفيه .

الجواب : عند $x = 0$ ، $x = l$ يجب أن تتحقق شروط حدية على الصورة

$$\Theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2 \Theta_x(0, t), \quad \Theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2 \Theta_x(l, t).$$

٧ ـ علق ثقل كتلته M فى نقطة ما $x = x_0$ من وتر $(0 \leqslant x \leqslant l)$. استنبط شروط الترافق فى النقطة $x = x_0$.

٨ ـ علق ثقل كتلته M فى طرف قضيب مرن $x = l$ مثبت تثبيتًا مرنًا عند طرفه $x=0$. اكتب المعادلة والشروط التى تحدد عملية الذبذبات الطولية للقضيب بافتراض أنه علاوة على ذلك تؤثر عليه قوة خارجية . ادرس حالتين :

(أ) القوة موزعة على طول القضيب بكثافة $F(x, t)$ ،

(ب) القوة مركزة فى النقطة $x = x_0$ وتساوى $F_0(t)$.

٩ ـ ادرس عملية الذبذبات الصغيرة لغاز مثالى فى أنبوبة أسطوانية . استنبط أولاً معادلات الهيدروديناميكا الأساسية ثم افرض أن العملية ادياباتية . واستنبط المعادلة التفاضلية التى تحدد : (١) الكثافة ρ ، (٢) الضغط p ، (٣) جهد سرعة جسيمات الغاز U ، (٤) السرعة v ، (٥) إزاحة الجسيمات u . أورد أمثلة لتحقق الشروط الحدية من كل من الأنواع الأول والثانى والثالث لهذه المعادلات .

١٠ ـ اثبت علاقات التشابه بين عمليات الذبذبات الميكانيكية والصوتية والكهربائية (انظر الملحق السادس للباب الثانى) .

١١ ـ اورد أمثلة للشروط الحدية من كل من الأنواع الأول والثانى والثالث للمعادلات التلغرافية .

١٢ ـ ادرس مسألة الذبذبات الطولية لقضيب غير متجانس ($k = k_1$ عندما $x < x_0$ و $k = k_2$ عندما $x > x_0$) واستنبط شروط الترافق فى نقطة التحام الجزئين غير المتجانسين من القضيب (عند $x = x_0$) .

١٣ ـ وضح التفسير الفيزيائى للشرط الحدى

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

١٤ ـ أورد مثالاً لنموذج ميكانيكى تتحقق له المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

بند ٢ ـ طريقة الموجات المنتشرة

فقرة ١ : علاقة دالمبرت . سنبدأ دراسة طرق تكوين حلول المسائل الحدية للمعادلات من النمط الزائدى بالمسألة ذات الشروط الابتدائية لوتر لانهائى :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

نحول هذه المعادلة إلى الصورة القياسية التى تحتوى على مشتقة مختلطة (انظر الباب الأول) . معادلة المميزات :

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

تنقسم إلى معادلتين :

$$dx - a\,dt = 0, \quad dx + a\,dt = 0,$$

تكاملاهما هما المستقيمان

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

وبالاستعانة كالعادلة بمتغيرين جديدين

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

نحول معادلة ذبذبات الوتر إلى الصورة :

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

نعين التكامل العام للمعادلة الأخيرة . من الواضح أنه لأى حل للمعادلة (3) يكون

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

حيث $f^*(\eta)$ دالة ما فى المتغير η . وبتكامل هذه المتساوية بالنسبة إلى η مع تثبيت ξ نحصل على :

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{4}$$

حيث f_1 و f_2 دالتان كل منهما فى أحد المتغيرين ξ أو η فقط . وبالعكس فأيًا كانت الدالتان القابلتان للتفاضل مرتين f_1 و f_2 فإن الدالة $u(\xi, \eta)$ المحددة بالعلاقة (4) تكون هى عبارة عن حل المعادلة (3) . وحيث إنه يمكن التعبير عن أى حل للمعادلة (3) فى الصورة (4) عند الإختيار المناسب للدالتين f_1 و f_2 فإن العلاقة (4) تعتبر تكاملاً عامًا لهذه المعادلة . وبالتالى فالدالة

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{5}$$

هى التكامل العام للمعادلة (1) .

نفرض أن حل المسألة محل البحث موجود. وعندئذ يعطى هذا الحل بالعلاقة (5). نعين الدالتين f_1 و f_2 بحيث تحققان الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{7}$$

وبتكامل المتساوية الثانية نحصل على :

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C,$$

حيث C ، x_0 ثابتان. ومن المتساويتين

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C$$

نعين

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + \frac{C}{2},\\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha - \frac{C}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

وبذلك حددنا الدالتين f_2 ، f_1 بدلالة الدالتين المعطاتين ψ ، φ ، علمًا بأن المتساويتين (8) يجب أن تتحققا لأية قيمة للمتغير المستقل* .

وبالتعويض فى (5) بقيمتى f_2 ، f_1 الناتجتين نحصل على :

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\, d\alpha\right\}$$

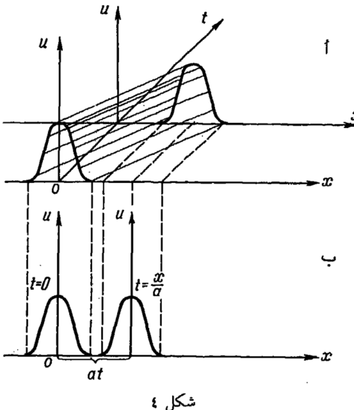
* فى العلاقة (5) حددت الدالتان f_2 ، f_1 تحديدا غير أحادى القيمة . فإذا طرحنا من f_1 ، وأضفنا إلى f_2 ثابتا ما C_1 ، لن تتغير u . وفى العلاقة (8) لا يتحدد الثابت C بدلالة ψ ، φ ، غير أنه يمكن حذفه دون أن يغير ذلك من قيمة u . وعند جمع f_2 ، f_1 يختصر الحدان $C/2$ ، $-C/2$.

أو

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (9)$$

وتسمى العلاقة (9) بعلاقة دالمبرت ، وقد حصلنا عليها بافتراض وجود حل المسألة المصاغة . وهذه العلاقة تثبت وحدانية الحل . بالفعل فلو وجد حل ثان للمسألة (2)—(1) لعبر عنه بالعلاقة (9) وبالتالى لانطبق على الحل الأول .

وليس من العسير التأكد من أن العلاقة (9) تحقق (بفرض قابلية الدالة φ للتفاضل مرتين وقابلية ψ للتفاضل مرة واحدة) المعادلة والشروط الابتدائية . وبالتالى تثبت الطريقة المعروضة وحدانية ووجود حل المسألة المصاغة .



شكل ٤

فقرة ٢ : التفسير الفيزيائى . الدالة $u(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (9) تعبر عن عملية انتشار الانحراف الابتدائى والسرعة الابتدائية . وإذا ثبت $t = t_0$ فإن الدالة $u(x, t_0)$ تعطى المقطع الجانبى للوتر فى اللحظة t_0 . وبتثبيت $x = x_0$ نحصل على الدالة $u(x_0, t)$ التى تعطى عملية الحركة فى النقطة x_0 (شكل ٤) . نفرض أن الشخص الملاحظ موجود فى النقطة $x = 0$ فى اللحظة $t = 0$ ويتحرك بسرعة a

فى الاتجاه الموجب. ندرج مجموعة إحداثيات مثبتة مع الملاحظ بفرض $x' = x - at$ و $t' = t$. وفى هذه المجموعة المتحركة للإحداثيات تكون الدالة $u(x, t) = f(x - at)$ معرفة بالعلاقة $u = f(x')$ وسيرى الملاحظ طول الوقت نفس المقطع الجانبى الذى رآه فى اللحظة الابتدائية. وبالتالى فالدالة $f(x - at) = u(x, t)$ تعبر عن المقطع الجانبى غير المتغير $f(x)$ الذى يتحرك إلى اليمين (فى الاتجاه الموجب) بسرعة a (الموجة المتنشرة أو الجارية). ومن الواضح أن الدالة $f(x + at)$ تعبر عن الموجة المنتشرة إلى اليسار (فى الاتجاه السالب للمحور x) بالسرعة a . وبذلك فالحل العام (9) لمسألة كوشى للوتر اللانهائى هو تراكب موجتين $f_1(x + at) + f_2(x - at)$ إحداهما تنتشر إلى اليمين بالسرعة a والأخرى إلى اليسار بنفس السرعة. وعند ذلك يكون

$$f_1(x + at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \Psi(x + at), \quad f_2(x - at) = \\ = \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \Psi(x - at),$$

حيث

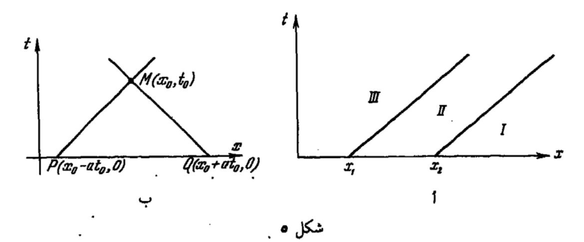
$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

ولتوضيح طابع الحل (9) يكون من المناسب الاستعانة بمستوى الحالات (x, t) أو «المستوى الطورى». والمستقيمان $x + at = \text{const}$ ، $x - at = \text{const}$ هما عبارة عن مميزتى المعادلة (1) (المستقيمين المميزين). والدالة $u = f(x - at)$ تحتفظ بقيمة ثابتة على امتداد المميزة $x - at = \text{const}$ ، أما الدالة $u = f(x + at)$ فتكون ثابتة على امتداد المميزة $x + at = \text{const}$.

نفرض أن $f(x)$ مختلفة عن الصفر فى الفترة (x_1, x_2) فقط وتساوى الصفر خارج هذه الفترة. نمد المميزتين $x - at = x_1$ ، $x - at = x_2$ من النقطتين $(x_1, 0)$ و $(x_2, 0)$ ، فتقسمان نصف المستوى $(x, t > 0)$ إلى ثلاث مناطق I, II, III (شكل ٥ ، أ). والدالة $u = f(x - at)$ لا تساوى الصفر فى المنطقة II فقط حيث $x_1 < x - at < x_2$ ، وتعتبر المميزتان $x - at = x_1$ ، $x - at = x_2$ الجبهتين الأمامية والخلفية للموجة المنتشرة إلى اليمين.

ندرس الآن نقطة ما مثبتة (x_0, t_0) ونمد منها المميزتين $x - at = x_0 - at_0$ و $x + at = x_0 + at_0$ فتقطعان المحور x فى النقطتين $t = 0$ ، $x_1 = x_0 - at_0$ و $t = 0$ ، $x_2 = x_0 + at_0$. وقيمة الدالة $u = f_1(x - t) + f_2(x + at)$ فى النقطة (x_0, t_0) تساوى $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ أى تتحدد بقيمتى الدالتين $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ فى النقطتين $(x_2, 0)$ ، $(x_1, 0)$ اللتين تعتبران رأسين للمثلث MPQ (شكل ٥ ، ب) المتكون بالمميزتين والمحور x . وهذا المثلث يسمى بالمثلث المميز للنقطة (x_0, t_0) . ومن العلاقة (9) يتضح أن الانحراف $u(x_0, t_0)$ لنقطة الوتر فى اللحظة t_0 يعتمد فقط على قيم الانحراف الابتدائى فى الرأسين $P(x_0 - at_0, 0)$ و $Q(x_0 + at_0, 0)$ للمثلث المميز MPQ وعلى السرعة الابتدائية على الضلع PQ . ويتضح ذلك بجلاء إذا كتبنا العلاقة (9) على الصورة :

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (10)$$



شكل ٥

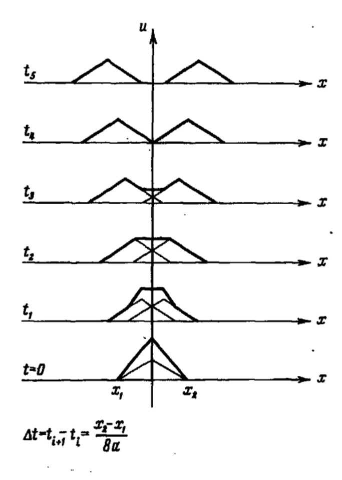
والمعطيات الابتدائية المعطاة خارج PQ لا تؤثر على قيمة $u(x, t)$ فى النقطة $M(x_0, t_0)$. وإذا كانت الشروط الابتدائية معطاة لا على كل المستقيم اللانهائى وإنما على الجزء P_1Q_1 فإنها تحدد الحل تحديدًا أحادى القيمة داخل المثلث المميز الذى تكون قاعدته الجزء P_1Q_1 .

فقرة ٣ : أمثلة . يمكن التعبير عن الحل (9) فى صورة المجموع $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ حيث

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \qquad (11)$$

$$u_2(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (12)$$

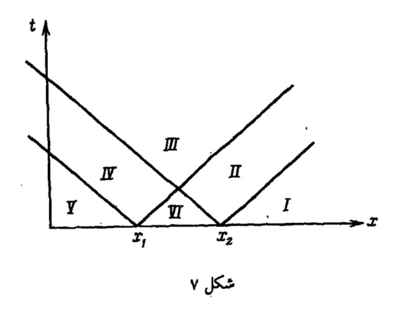
وإذا كانت السرعة الابتدائية مساوية للصفر ($\psi(x) = 0$) فإن الانحراف $u = u_1(x, t)$ يكون هو مجموع الموجتين الجاريتين اليسرى واليمنى ، علماً بأن الشكل الابتدائى لكل موجة يتحدد بالدالة $0.5\varphi(x)$ المساوية لنصف الانحراف الابتدائى . أما إذا كان $\varphi(x) = 0$ فإن $u = u_2(x, t)$ تكون عبارة عن اضطراب الوتر الناشئ عن السرعة الابتدائية .



شكل ٦

مثال ١ : ندرس انتشار الانحراف الابتدائى المعطى فى صورة مثلث متساوى الساقين . ويمكن الحصول على هذا المقطع الجانبى الابتدائى إذا شد الوتر من منتصف الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$. وفى شكل ٦ بينت الأوضاع المتتالية للوتر بعد الفترات الزمنية $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.

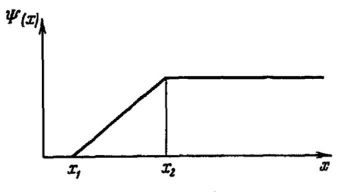
ويمكن الحصول على تصور واضح عن طابع عملية الانتشار بواسطة المستوى الطورى (x, t) . تمد المميزتين من كل من النقطتين $Q(x_2, 0)$ ، $P(x_1, 0)$ فتقسمان نصف المستوى $(-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0)$ إلى ست مناطق (شكل ٧) . والانحراف $u_1(x, t)$ فى أية نقطة (x, t) يعطى بالعلاقة (11) . ولذا فالانحراف فى المناطق I, III, V يساوى الصفر لأن المثلث المميز لأية نقطة فى هذه المناطق لا يكون له نقط مشتركة مع الجزء $[x_1, x_2]$ الذى أعطيت عليه الشروط الابتدائية. وفى المنطقة II يكون الحل هو «الموجة اليمنى» $u = 0.5 \ \varphi(x - at)$ ، وفى المنطقة IV يكون الحل هو «الموجة اليسرى» $u = 0.5 \ \varphi(x + at)$. ويكون الحل فى المنطقة VI هو مجموع الموجتين «اليسرى» و «اليمنى» .



شكل ٧

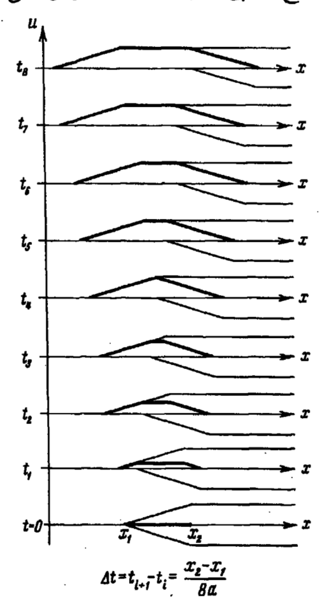
مثال ٢ : نفرض أن الانحراف الابتدائى $\varphi(x) \equiv 0$ ، والسرعة الابتدائية تختلف عن الصفر فى الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$ فقط ، حيث تأخذ فيها قيمة ثابتة ψ_0 : $\psi(x) = \psi_0$ عندما $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ ، $\psi(x) = 0$ عندما $x > x_2$ و $x < x_1$. وفى هذه الحالة يكون الحل هو الدالة $u_2(x, t)$. نحسب الدالة $\Psi(x)$ ، مختارين عند ذلك $x_0 = 0$ (شكل ٨) :

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\alpha) \, d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad x < x_1, \\ (x - x_1)\psi_0/2a & , \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ (x_2 - x_1)\psi_0/2a & , \quad x > x_2. \end{cases} \tag{13}$$



شكل ٨

والحل $u_2(x, t)$ هو الفرق بين الموجتين اليمنى واليسرى بالمقطع الجانبى $\Psi(x)$. وبينت الأوضاع المتتالية لهاتين الموجتين خلال الفترات الزمنية $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$ فى شكل ٩ . والمقطع الجانبى للوتر عند $t \geqslant 4\Delta t$ يكون على شكل شبه منحرف



$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{x_2 - x_1}{8a}$

شكل ٩

يتوسع بانتظام بمرور الزمن . وإذا لم تكن $\psi(x)$ ثابتة على $[x_1, x_2]$ فإن المقطع الجانبي $\Psi(x)$ هو فقط الذى سيتغير.

ولتوضيح طابع الحل نستعين بالمستوى الطورى (x, t) (شكل ٧) . نكتب صيغ $u(x, t)$ فى المناطق المختلفة للمستوى الطورى .

فى المنطقة I $(x - at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \Psi(x - at) = \text{const}, \quad u(x,t) = 0 .$$

فى المنطقة V $(x + at < x_1)$

$$\Psi(x - at) = \Psi(x + at) = 0, \quad u(x, t) = 0.$$

فى المنطقة III $(x - at < x_1, x + at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0.$$

فى المنطقة II $(x_1 < x - at < x_2, \; x + at > x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a}\psi_0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a}\psi_0.$$

فى المنطقة IV $(x_1 < x + at < x_2, \; x - at < x_1)$

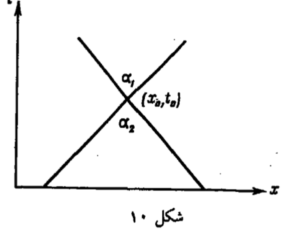
$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0, \quad \Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0.$$

فى المنطقة VI $(x - at > x_1, \; x + at < x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a}\psi_0, \quad u(x, t) = t\psi_0.$$

مثال ٣ : ندرس مسألة ذبذبة الوتر تحت تأثير دفع مركز. وباكساب نقط الوتر $(x, x+\Delta x)$ سرعة ثابتة ψ_0 فى اللحظة الابتدائية (مثلاً بالدق على الوتر بمطرقة) نؤثر بذلك على هذا الجزء من الوتر بدفع I يساوى التغيير فى كمية الحركة عند $t=0$ ، ومن ثم فإن $I = \rho\Delta x\psi_0$ حيث ρ الكثافة الخطية للوتر. وبذلك فيجب علينا حل مسألة ذبذبة الوتر بانحراف ابتدائى يساوى صفرًا وسرعة ابتدائية $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ فى الفترة $(x, x+\Delta x)$ ، و $\psi = 0$ خارج هذه الفترة ، وهنا $I_0 = I/\Delta x$ هو كثافة الدفع . وقد ورد تحليل لحل هذه المسألة عند حل المثال ٢ . والانحراف الذى يسببه الدفع الموزع على الفترة $(x, x+\Delta x)$ يكون عند $t > \Delta x/2a$ هو عبارة عن شبه منحرف قاعدته السفلى $2at+\Delta x$ وقاعدته العليا $2at-\Delta x$. وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \to 0, I_0 = \text{const}$ فنرى أن الانحراف يكون مساويًا للصفر خارج $(x-at, x+at)$ ومساويًا $I/2a\rho$ داخل هذه الفترة . ويمكن الاصطلاح على أن الانحرافات يسببها الدفع النقطى I (point impulse) .



شكل ١٠

ندرس المستوى الطورى (x, t) ونمد من النقطة (x_0, t_0) المميزتين :

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(شكل ١٠) فتحددان زاويتين α_2 , α_1 تسميان بالزاويتين المميزتين العليا والسفلى على الترتيب للنقطة (x_0, t_0) .

ويسبب تأثير الدفع النقطى فى النقطة (x_0, t_0) انحرافًا مساويًا $\frac{1}{2a}\frac{I_0}{\rho}$ داخل الزاوية المميزة العليا ومساويا الصفر خارجها .

فقرة ٤ : المعادلة غير المتجانسة . ندرس مسألة كوشى لمعادلة الذبذبات غير المتجانسة

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,\ t),\\ -\infty<x<\infty,\qquad t>0,\\ u(x,\ 0)=\varphi(x),\\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\\ -\infty<x<\infty.\end{array}\right\} \tag{14}$$

نفرض أن $w_f(x, t; \tau)$ حل مسألة كوشى المساعدة

$$\frac{1}{a^2}(w_f)_{tt}=(w_f)_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>\tau \tag{15}$$

$$w_f(x,\ \tau;\ \tau)=0,\quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\ \tau;\ \tau)=f(x,\ \tau),\ t=\tau,\ -\infty<x<\infty. \tag{16}$$

وتعطينا علاقة دالمبرت (9) :

$$w_f(x,\ t;\ \tau)=w_f(x,\ t-\tau;\tau)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi. \tag{17}$$

نكتب علاقة دالمبرت (9) على الصورة

$$u(x,\ t)=\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,\ t;\ 0)+w_\psi(x,\ t;\ 0), \tag{18}$$

حيث

$$w_\psi(x,\ t;\ 0)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi,\quad w_\varphi(x,\ t;\ 0)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi$$

هما حلا المسألة (16) ، (15) عند $\tau=0$ و $f=\psi(x)$ ، $f=\varphi(x)$ على الترتيب لأن عملية التفاضل مباشرة توضح أن

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,\ t;\ 0)=\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

نثبت أن المأخوذة التالية صحيحة :

يكون حل المعادلة غير المتجانسة (14) بالشروط الابتدائية الصفرية $u(x,0)=0$ و $u_t(x,0)=0$ على الصورة

$$u(x,\ t)=a^2\int_0^t w_f(x,\ t;\ \tau)\,d\tau. \qquad (19)$$

وبتفاضل الدالة (19) والأخذ فى الاعتبار الشروط (16) للدالة $w_f(x,t;\tau)$ نحصل على :

$$u_t(x,\ t)=a^2w_f(x,\ t;\ t)+a^2\int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\ t;\ \tau)\,d\tau=a^2\int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\ t;\ \tau)\,d\tau, \qquad (20)$$

$$u_{tt}(x,\ t)=a^2\frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\ t;\ t)+a^2\int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,\ t;\ \tau)\,d\tau=$$

$$=a^2\int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,\ t;\ \tau)\,d\tau+a^2f(x,\ t),$$

$$u_{xx}=a^2\int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x,\ t;\ \tau)\,d\tau=\int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,\ t;\ \tau)\,d\tau.$$

ومن هنا يتضح أن الدالة (19) تحقق المعادلة (14) . ومن العلاقتين (20) ، (19) ينتج مباشرة أنه يمكن التعبير عن حل المسألة (14) وفقًا للعلاقتين (18) و (19) على الصورة :

$$u(x,\ t)=\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,\ t;\ 0)+w_\psi(x,\ t;\ 0)+a^2\int_0^t w_f(x,\ t;\ \tau)\,d\tau. \qquad (21)$$

وبالاستعانة بالصيغة (17) للدالة w_f نحصل على :

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (22)$$

ويوضح التعويض المباشر بالعلاقة (22) فى (14) أن الدالة (22) بالفعل تعتبر

حلاً للمسألة (14) إذا وجدت المشتقات $\partial f/\partial x$ و $\psi'(x)$ و $\varphi''(x)$.

وينتج من العلاقة (17) أن الدالة w_f تحقق المعادلة عندما $t=\tau$ إذا كانت f قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x أى أن التعبير (21) يكون ممكنًا عند تحقق نفس الشروط التى يوجد عندها حل مسألة كوشى .

وتوضح العلاقة (21) أن حل المسألة العامة (14) يمكن أن يكتب مباشرة إذا كان لدينا حل للمسألة المساعدة (16) ـ (15) . وتتحقق علاقة مماثلة لمسألة كوشى فى الفراغ اللانهائى (انظر الباب الأول من الجزء الثانى) .

فقرة ٥ : استقرار الحلول . حل المعادلة (1) يتحدد تحديدًا أحادى القيمة بالشروط الابتدائية (2) . نثبت أن هذا الحل يتغير باتصال فى حالة التغير المتصل للشروط الابتدائية .

أيًّا كانت الفترة الزمنية $[0, t_0]$ ، وأيًّا كانت درجة الدقة ε ، يوجد ذلك العدد $\delta(\varepsilon, t_0)$ بحيث إن أى حلين للمعادلة (1) :$u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ سيختلفان عن بعضهما خلال الفترة الزمنية t_0 بأقل من ε :

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)|<\varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

بمجرد أن تختلف الشروط الابتدائية

$$\left\{\begin{array}{l} u_2(x, 0)=\varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0)=\psi_2(x) \end{array}\right. \quad و \quad \left\{\begin{array}{l} u_1(x, 0)=\varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0)=\psi_1(x) \end{array}\right.$$

عن بعضها بأقل من δ :

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta; \quad |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta.$$

وإثبات هذه النظرية بسيط للغاية . الدالتان $u_2(x, t)$ ، $u_1(x, t)$ ترتبط كل منهما بشروطها الابتدائية بالعلاقة (9) ومن ثم فإن

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)| \leqslant \frac{|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)|}{2}+$$
$$+\frac{|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)|}{2}+\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)|\, d\alpha,$$

ومن هنا نحصل على

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \leqslant \delta(1 + t_0),$$

مما يثبت فرض النظرية إذا وضعنا

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}.$$

إن أية عملية فيزيائية معينة تتطور بالزمن يجب أن تميز بدوال تعتمد اعتمادًا متصلاً على المعطيات الابتدائية . ولو لم يتحقق هذا الاعتماد المتصل لأصبح من الممكن للعمليتين المختلفتين اختلافًا جوهريًا أن تناظرا مجموعتين من الشروط الابتدائية متشابهتين عمليًا (ينحصر الاختلاف بينهما فى حدود دقة القياسات) . ولا يمكن اعتبار العمليات من هذا النوع محددة (فيزيائيًا) بمثل هذه الشروط الابتدائية . وينتج من النظرية السابقة أن عملية ذبذبات الوتر ليست محددة رياضيًا فحسب وإنما تكون أيضًا محددة فيزيائيًا بالشروط الابتدائية .

وإذا كان حل المسألة الرياضية يعتمد اعتمادًا متصلاً على الشروط الإضافية (على المعطيات الابتدائية والحدية وعلى الطرف الأيمن للمعادلة أى على المعطيات الأصلية للمسألة) فإنه يقال بأن المسألة مستقرة .

ونظرًا لدراسة الظواهر الفيزيائية المحددة يستعان بمفهوم انضباط الصياغة (correctness) . فيقال إن المسألة الرياضية مضبوطة الصياغة إذا كان : (١) حل المسألة موجودًا ، (٢) للمسألة حل وحيد ، (٣) حل المسألة يعتمد اعتمادًا متصلاً على المعطيات الأصلية ، أى يكون الحل مستقرًا .

ونشير إلى أن المسائل الرياضية غير مضبوطة الصياغة تقابلنا كثيرًا فى التطبيقات ، وتنتمى إلى عدادها كثير من المسائل الرياضية المعروفة .

نورد مثالاً لمسألة غير مضبوطة الصياغة حلها غير مستقر .

الدالة $u(x, y)$ التى تعتبر حلاً لمعادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ تتحدد تحديدًا أحادى القيمة بشروطها الابتدائية* $u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x)$.
ندرس الدالتين $u^{(1)}(x, y) \equiv 0,\ u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x \cdot \cosh\lambda y$ اللتين تحققان معادلة لابلاس . وتعتمد الدالة $u^{(2)}(x, y)$ على λ كبارامتر . والقيم الابتدائية

$$u^{(1)}(x,\ 0) = 0, \quad u^{(2)}(x,\ 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x,$$
$$u^{(1)}_y(x,\ 0) = 0, \quad u^{(2)}_y(x,\ 0) = \psi(x) = 0$$

تختلف عن بعضها اختلافًا طفيفًا للغاية (بأى مقدار صغير نريده) عند القيم الكبيرة كبرًا كافيًا للبارامتر λ . غير أن الحل $u^{(2)}(x, y)$ يمكن عند ذلك أن يصبح كبيرًا للغاية (أى كبر نريده) مهما كانت قيمة y المثبتة . وبالتالى فالمسألة بالشروط الابتدائية لمعادلة لابلاس تكون غير مضبوطة الصياغة .

ومن الطبيعى أن يتبادر إلى الذهن تساؤل عما إذا كانت المسائل غير مضبوطة الصياغة يمكن بوجه عام أن تناظر مسائل تشكل أهمية ما للفيزياء ، وأيضًا أية قيمة علمية يمكن أن يشكلها الحل التقريبى للمسائل غير مضبوطة الصياغة فالأخطاء الصغيرة فى شروط المسائل يمكن أن تناظرها أخطاء كبيرة فى الحل ؟

وتنشأ مثل هذه الشكوك نتيجة لأننا نقصد فيما ذكرنا أعلاه أنه بمثابة الحل التقريبى للمسألة يؤخذ الحل الدقيق للمسألة المناظرة للشروط المقربة .

نورد مثالاً لمسألة غير مضبوطة الصياغة ذات أهمية عملية كبيرة .

ندرس مسألة تعيين المشتقة $z(x) = \frac{df}{dx}$ بالقيم التقريبية المنتظمة للدالة $f(x)$. نفرض أن معيار الدقة عند إعطاء $\tilde{f}(x)$ وتعيين $\tilde{z}(x)$ يحدد كما يلى :

$$\max|\tilde{f}(x) - f(x)| \quad , \quad \max|\tilde{z}(x) - z(x)|.$$

ومن الواضح أن هذه المسألة وفقًا لمصطلحاتنا السابقة هى مسألة غير مستقرة (غير مضبوطة الصياغة) . بالفعل ، فإذا كان $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta\cos\omega x$ فإن $\max|\tilde{f}(x) - f(x)| = \varepsilon$ عند قيم δ الصغيرة . غير أنه إذا اخترنا المشتقة الدقيقة للدالة $\tilde{f}(x)$ بمثابة القيمة التقريبية $\tilde{z}(x)$ لحصلنا على

$$\tilde{z}'(x) = \tilde{f}'(x) - \delta\omega\sin\omega x \quad , \quad \max|\tilde{z}(x) - z(x)| = \delta\omega;$$

---

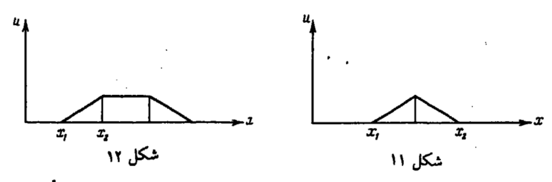
* هذه الشروط تحدد حل معادلة لا بلاس تحديدا رياضيا أحادى القيمة . بالفعل فإعطاء $u_y(x, 0)$ يكافىء $v_x(x, 0)$ حيث $v(x, y)$ دالة مرافقة توافقيا للدالة $u(x, y)$. وبهذا تتحدد تحديدا أحادى القيمة ، بدقة ثابت فقط ، الدالة التحليلية التى يكون قسمها الحقيقى هو الدالة $u(x, y)$ (انظر الباب الرابع ، بند ١ ، فقرة ٥) .

و $\delta\omega$ يمكن عند قيمة δ المثبتة وقيم ω الكبيرة أن يصبح عددًا كبيرًا أى كبر نريده . غير أنه من المعلوم جيدًا أنه بمثابة القيمة التقريبية للمشتقة تؤخذ العلاقة الفرقية $\frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h}$ التى تعبر عن المشتقة المطلوبة بخطأ صغير أى صغر نريده عندما يكون h و δ/h صغيرين صغرًا كافيًا . ومن المفهوم عند ذلك أنه للحصول على تقريب جيد للمشتقة df/dx من القيمة التقريبية للدالة $\tilde{f}(x)$ يجب أن يكون الخطأ δ صغيرًا صغرًا كافيًا .

وهكذا فى المثال المعروض يمكن رغم عدم استقرار المسألة ـ ذكر طريقة للحصول على تقريبات ذات دقة عالية بأية درجة نريدها للحل المطلوب من الشروط التقريبية للمسألة ذات الدقة الكافية . ويعتبر مثل هذا الوضع نموذجيًا لكثير من المسائل غير مضبوطة الصياغة .

والمسائل غير المضبوطة الصياغة كثيرًا ما تقابلنا فى الفيزياء عند دراسة نماذج غير قابلة للبحث أو الفحص (للقياس) بشكل مباشر . وفى هذه الحالات نضطر إلى عمل استنتاجات معينة عن مميزات «z» هذه النماذج وفقًا لظواهرها غير المباشرة (المحددة فيزيائيا) «u» والتى يمكن قياسها فى التجارب العملية ـ وهى ترتبط بالمميزات «z» بارتباط دالى على الصورة $A_z = u$. وتتيجة لذلك نصل إلى مسألة معالجة نتائج التجارب التى تعتبر مسألة عكسية وتنحصر فى تعيين المميزات «z» للنماذج محل البحث وفقًا لمعطيات التجارب «u» . وكثير من هذه المسائل ليست مضبوطة الصياغة . وكحالة خاصة فمسألة كوشى المصاغة أعلاه لمعادلة لابلاس يكون لها علاقة مباشرة بمسألة القياس الوزنى العكسية (تعيين شكل الجسم بما يسببه من تفاوت فى قياس مقدار قوة الجاذبية) . ويعتبر المثال الوارد أعلاه لحساب المشتقة وفقًا للقيم التقريبية للدالة مثالاً نموذجيًا فى كثير من التجارب حيث تجرى القياسات بطريقة التراكم .

نشير الآن إلى الموضوع التالى . من الواضح أن الدالة $u(x,t)$ المعرفة بالعلاقة (9) يمكن أن تكون حلاً للمعادلة (1) فقط فى تلك الحالة عندما تكون الدالة $\psi(x)$ قابلة للتفاضل ، والدالة $\varphi(x)$ قابلة للتفاضل مرتين . ويتضح مما ذكر أن الدالتين المبينتين فى شكلى ١١ ، ١٢ لا يمكن اعتبارهما حلاً للمعادلة (1) ، لأنهما ليستا



شكل ١٢ — شكل ١١

قابلتين للتفاضل مرتين فى كل مكان . وعلاوة على ذلك يمكن القول بأن حل معادلة الذبذبات الذى يحقق الشروط (2) لا يكون موجودًا إذا لم يكن للدالتين $\varphi(x), \psi(x)$ المشتقات الضرورية . بالفعل فبتكرار التحليل الذى أوصلنا إلى العلاقة (9) يمكننا القول بأنه إذا وجد حل لمعادلة الذبذبات فيجب التعبير عنه بالعلاقة (9) . أما إذا لم تكن الدالتان φ, ψ قابلتين للتفاضل عددًا كافيًا من المرات فإن

العلاقة (9) ستحدد دالة لا تحقق المعادلة (1) ، أى أنه لا يوجد حل لهذه المسألة .

غير أنه إذا تغيرت الشروط الابتدائية تغيرًا طفيفًا بالتعويض عنها بدالتين قابلتين للتفاضل $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ فإن هذه الشروط الابتدائية سيناظرها حل للمعادلة (1) . وبالإضافة إلى ذلك نشير إلى أننا عند إثبات نظرية هذه الفقرة قد أثبتنا فعليًا أن الدوال المحددة بالعلاقة (9) تعتمد اعتمادًا متصلاً على الدالتين الابتدائيتين ψ ، φ (دون أن يتوقف ذلك على ما إذا كانت هاتان الدالتان قابلتين للتفاضل أم لا) . وبذلك فإذا لم يناظر دالتين ما φ, ψ حل لمعادلة الذبذبات يحقق الشروط (2) فإن الدالة المحددة بالعلاقة (9) تكون هى عبارة عن نهاية حلول معادلة الذبذبات التى جعلت شروطها الابتدائية أكثر ملوسة (smoothness).والدوال الناتجة من هذا الانتقال إلى النهاية تسمى بالحلول المعممة . ويلعب مفهوم الحلول المعممة دورًا مهمًا فى الفيزياء وقد أدخله العالم السوفييتى س . سوبوليف .

فقرة ٦ : المستقيم نصف اللانهائى وطريقة الاستكمالات . ندرس مسألة انتشار الموجات على مستقيم نصف لانهائى (نصف لا محدود) $x \geqslant 0$. وهذه المسألة ذات قيمة هامة خاصة عند دراسة عملية انعكاس الموجات عن طرف المستقيم وتصاغ بالطريقة التالية :

عين حل معادلة الذبذبات

$$a^2u_{xx}=u_{tt} \quad \text{عند} \quad 0<x<\infty ،\ t>0 ،$$

الذى يحقق الشرط الحدى

$$u(0, t)=\mu(t) \quad (\text{أو } u_x(0, t)=\nu(t)) \quad (t\geqslant 0) ،$$

والشرطين الابتدائيين

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0)=\varphi(x), \\ u_t(x, 0)=\psi(x) \end{array}\right\} \quad (0\leqslant x<\infty).$$

ندرس فى البداية حالة الشرط الحدى المتجانس

$$u(0, t)=0 \quad \text{أو} \quad u_x(0, t)=0 ،$$

أى مسألة انتشار الاضطراب الابتدائى فى وتر ذى طرف مثبت $x = 0$ (أو طرف حر).

نذكر المأخوذتين التاليتين عن خواص حلول معادلات الذبذبات المعرفة على مستقيم لانهائى.

١ ـ إذا كانت المعطيات الابتدائية فى مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهائى (المسألة (2)—(1)) دوال فردية بالنسبة إلى نقطة ما x_0 فإن الحل المناظر فى هذه النقطة يكون مساويًا للصفر.

٢ ـ إذا كانت المعطيات الابتدائية فى مسألة انتشار الذبذبات على مستقيم لانهائى (المسألة (2)—(1)) دوال زوجية بالنسبة إلى نقطة ما x_0 فإن مشتقة الحل المناظر فى هذه النقطة بالمتغير x تكون مساوية للصفر.

نثبت المأخوذة ١. نعتبر x_0 نقطة الأصل، $x_0 = 0$. فى هذه الحالة تكتب شروط فردية المعطيات الابتدائية على الصورة:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

والدالة $u(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (9)، عند $x = 0$، $t > 0$ تساوى

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

وذلك لأن الحد الأول يساوى صفرًا وفقًا لفردية $\varphi(x)$، والحد الثانى يساوى صفرًا لأن تكامل الدالة الفردية بالحدين المتماثلين بالنسبة لنقطة الأصل يساوى دائمًا الصفر.

وبالمثل تثبت المأخوذة الثانية، فشروط زوجية المعطيات الابتدائية تأخذ الصورة:

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

ونشير إلى أن مشتقة الدالة الزوجية تكون دالة فردية:

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

ومن العلاقة (9) ينتج أن

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

لأن الحد الأول يساوى صفرًا وفقًا لفردية $\varphi'(x)$ ، والحد الثانى يساوى صفرًا وفقًا لزوجية $\psi(x)$ * .

وفعليًا يستند الإثبات الوارد أعلاه على علاقة دالمبرت ولا يرتبط بقابلية الدالة $u(x, t)$ للتفاضل مرتين . وبذلك أثبتنا أن المأخوذة الأولى صحيحة لأية دوال يمكن التعبير عنها بعلاقة دالمبرت . والمأخوذة الثانية صحيحة للدوال على نفس الصورة وللدالة $\psi(x)$ القابلة للتفاضل أى للحلول المعممة للمسألة (2)—(1) .

وبمساعدة هاتين المأخوذتين يمكن حل المسائل التالية :

المطلوب تعيين حل المعادلة (1) ، الذى يحقق الشروط الابتدائية

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} 0 < x < \infty, \tag{2'}$$

والشرط الحدى

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

(المسألة الحدية الأولى) .

ندرس الدالتين $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ اللتين تعتبران استكمالين فرديين للدالتين $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين تدخلان فى الشرط $(2')$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \ x > 0, \\ -\varphi(-x) & , \ x < 0, \end{cases}$$
$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & , \ x > 0, \\ -\psi(-x) & , \ x < 0. \end{cases}$$

* هاتان المأخوذتان نتيجة لكون الدالة $u(x, t)$ المعرفة بعلاقة دالمبرت عند $t > 0$ زوجية (أو فردية) ، إذا كانت المعطيات الابتدائية زوجية (أو فردية) (ونترك للقارئ إثبات ذلك بمفرده) . ومن الواضح هندسيا أن الدالة الفردية المتصلة ومشتقة الدالة الزوجية القابلة للتفاضل تساويان الصفر عند $x = 0$.

الدالة

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha$$

معرفة لجميع x و $t > 0$. ووفقًا للمأخوذة الأولى يكون

$$u(0, t) = 0.$$

وفضلاً عن ذلك فإن هذه الدالة عند $t = 0$ ، $x > 0$ تحقق الشروط الابتدائية :

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad x > 0.$$

وبذلك فبدراسة الدالة الناتجة $u(x, t)$ فقط للقيم $0 \leqslant x$, $t \geqslant 0$ نحصل على دالة تحقق جميع شروط المسألة المصاغة .

وبالعودة إلى الدوال الأولى يمكن كتابة :

$$u(x, t) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + & \\ \qquad + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(a)\, d\alpha \quad , & t < \dfrac{x}{a}, \quad x > 0 \\ \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + & \\ \qquad + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad , & t > \dfrac{x}{a}, \quad x > 0. \end{array}\right\} \quad (23)$$

وفى المنطقة $t < x/a$ لا يظهر تأثير الشروط الحدية وتنطبق صيغة $u(x, t)$ على الحل (9) لحالة المستقيم اللانهائى .

وبالمثل ، فإذا كان لدينا عند $x = 0$ طرف حر

$$u_x(0, t) = 0,$$

فبأخذ الاستكمال الزوجى لكل من الدالتين $\psi(x)$ ، $\varphi(x)$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & , \quad x>0,\\ \varphi(-x) & , \quad x<0;\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & , \quad x>0,\\ \psi(-x) & , \quad x<0,\end{cases}$$

نحصل على حل معادلة الذبذبات :

$$u(x,\ t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha$$

أو

$$u(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha & , \quad t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+ & \\ \quad +\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha+\int_{0}^{at-x}\psi(\alpha)\,d\alpha\right\} & , \quad t>\dfrac{x}{a},\end{cases}$$

الذى يحقق فى المنطقة $0 \leqslant x$ الشروط الابتدائية (2) والشرط الحدى $u_x(0,t)=0$.

وفى المستقبل سنلجأ كثيرًا عند حل مختلف المسائل إلى الاستعانة بطريقة استكمال المعطيات الابتدائية ، المحددة على جزء معين من المنطقة ، إلى المنطقة اللانهائية .

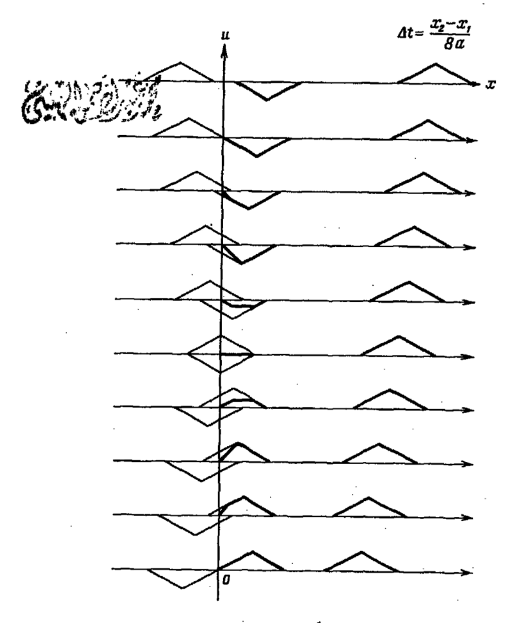
ولذا نصوغ مرة أخرى النتائج التى حصلنا عليها فى صورة قاعدتين :

لحل المسألة على مستقيم نصف محدود بشرط حدى $u(0,t)=0$ يجب استكمال المعطيات الابتدائية على كل المستقيم استكمالاً فرديًا .

ولحل المسألة على مستقيم نصف محدود بشرط حدى $u_x(0,t)=0$ يجب استكمال المعطيات الابتدائية على كل المستقيم استكمالاً زوجيًا .

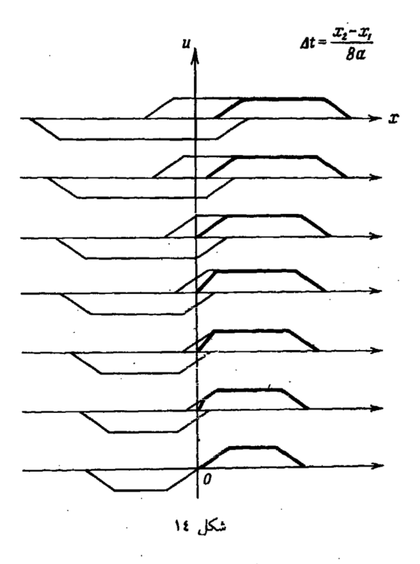
لندرس مثالين . نفرض أن المعطيات الابتدائية على مستقيم نصف محدود مثبت

عند $x = 0$ تكون مختلفة عن الصفر فقط فى الفترة (a, b) ، $0 < a < b$ التى يمثل فيها الانحراف الابتدائى المعطى بالدالة $\varphi(x)$ بمثلث متساوى الساقين و $\psi(x) = 0$. وينتج حل هذه المسألة إذا ما استكملت المعطيات الابتدائية فرديًا على المستقيم اللانهائى. وعملية انتشار الموجات مبينة فى شكل ١٣ . وفى البداية تحدث العملية تمامًا كما تحدث على المستقيم اللانهائى. والانحراف المعطى ينقسم إلى موجتين تتحركان فى ناحيتين بسرعة ثابتة ، علمًا بأن هذا يستمر حتى يصل نصف الموجة المتجه يسارًا إلى النقطة $x = 0$ (شكل ١٣) . وفى هذه اللحظة فعلى الناحية اليسرى$(x \leqslant 0)$ حيث تحدث عمليات مماثلة يصل إلى النقطة $x = 0$ نصف موجة «بطور عكسى» . وفى اللحظات التالية يحدث انعكاس لنصفى الموجتين عن الطرف



شكل ١٣

المثبت . وتبين هذه العملية بالتفصيل على الرسم فى شكل ١٣ . فيتقاصر المقطع الجانبى للموجة المنعكسة وتختفى الانحرافات ثم تظهر بإشارة عكسية . وأخيرًا يسير نصف الموجة المنعكس إلى اليمين وراء نصف الموجة الذى مر هناك بنفس السرعة . وهكذا فعند انعكاس الموجة عن الطرف المثبت للوتر يغير انحرافها إشارته .



شكل ١٤

ندرس المثال الثانى . نفرض أنه على المستقيم نصف اللانهائى $0 \leqslant x$ المثبت عند $x = 0$ يكون الانحراف الابتدائى مساويًا للصفر فى كل مكان ، أما السرعة الابتدائية $\psi(x)$ فتكون مختلفة عن الصفر فقط فى الفترة $(0 < x_1 < x_2)$ (x_1, x_2)، علمًا بأن $\psi(x) = \text{const}$ فى هذه الفترة . نستكمل المعطيات الابتدائية استكمالاً فرديًا . ومن كل فترة من الفترتين (x_1, x_2) و $(-x_1, -x_2)$ تنتشر انحرافات مشابهة لتلك المبينة فى شكل ١٤ . وكما يتضح من الرسم تحدث العملية فى المرحلة الأولى فى المنطقة $0 < x$ تمامًا كما تحدث على المستقيم اللانهائى . ثم يحدث انعكاس عن

الطرف المثبت وأخيرًا تتحرك الموجة التى يكون مقطعها الجانبى على شكل شبه منحرف متساوى الساقين إلى اليمين بسرعة ثابتة .

وتجرى دراسة الانعكاس عن الطرف الحر بطريقة مماثلة ، ولكن المعطيات الابتدائية يجب استكمالها زوجيًا ، ومن ثم يحدث انعكاس الموجة عن الطرف الحر لا بطور قد تغير وإنما بنفس الطور .

لقد درسنا مسائل بشروط حدية متجانسة

$$u(0, t) = \mu(t) = 0$$

أو

$$u_x(0, t) = \nu(t) = 0.$$

وفى الحالة العامة للشروط الحدية غير المتجانسة يمثل الحل فى صورة مجموع يحقق كل حد فيه شرطًا واحدًا فقط من شروط المسألة المصاغة (إما شرطًا حديًا وإما ابتدائيًا) .

وننتقل الآن إلى حل المعادلة عند الشروط الابتدائية الصفرية والشرط الحدى المعطى

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0,$$
$$\bar{u}(0, t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

من الواضح أن النظام الحدى يحدث موجة تنتشر على امتداد الوتر إلى اليمين بسرعة a مما يجعلنا نتنبأ بالصورة التحليلية للحل :

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

نعين الدالة f من الشرط الحدى

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

ومنها

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

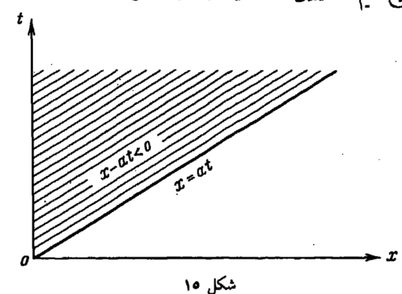
ومن ثم

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

غير أن هذه الدالة معرفة فقط فى المنطقة $x - at \leqslant 0$ لأن $\mu(t)$ معرفة للقيم $t \geqslant 0$. وفى شكل ١٥ تمثل هذه المنطقة بالجزء المخطط من المستوى الطورى . ولتعيين $\bar{u}(x, t)$ لجميع قيم المتغيرين المستقلين نستكمل الدالة $\mu(t)$ إلى القيم السالبة للمتغير t ، بفرض $\mu(t) = 0$ للقيم $t < 0$. عندئذ تكون الدالة

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

معرفة لجميع قيم المتغيرين المستقلين وتحقق الشروط الابتدائية الصفرية .



شكل ١٥

ومجموع هذه الدالة والدالة (23) المعرفة فى بداية هذه الفقرة هو عبارة عن حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات المتجانسة . وللوتر نصف المحدود يكون :

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad , \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad , \quad t > \dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{24}$$

وبالمثل يمكن تكوين حل المسألة الحدية الثانية. أما فيما يتعلق بالمسألة الحدية الثالثة فانظر الفقرة ٩ .

ونكتفى هنا بحل المسألة الحدية للمعادلة المتجانسة للذبذبات . وفيما يخص حل المعادلة غير المتجانسة انظر الفقرة ٩ .

فقرة ٧ : المسائل للفترة المغلقة المحدودة . ندرس المسائل الحدية للفترة المحدودة $(0, l)$. سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

الذى يحقق الشروط الحدية

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{array}\right\} \quad t \geqslant 0$$

والشروط الابتدائية

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

ندرس فى البداية حالة الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

سنبحث عن حل المسألة فى هذه الحالة بطريقة الاستكمال بافتراض إمكانية التمثيل التالى :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha,$$

حيث Φ و Ψ دالتان ينبغى تعيينهما . والشروط الابتدائية

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) = \psi(x) \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

تعرف قيم Φ و Ψ فى الفترة $(0, l)$.

ولتحقيق الشروط الحدية الصفرية نتطلب أن تكون الدالتان $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ فرديتين بالنسبة للنقطتين $x = 0,\ x = l$:

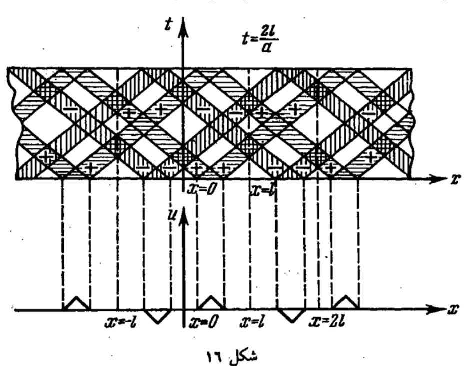
$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

وبالمقارنة بين هذه المتساويات نحصل على

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \qquad (x' = -x)$$

وبالمثل للدالة $\Psi(x)$ ، أى أن الدالتين Ψ , Φ تعتبران دالتين دوريتين بفترة دورة $2l$.

وليس من الصعب ملاحظة أن شروط الفردية بالنسبة إلى نقطة الأصل وشروط الدورية تحدد استكمال $\Phi(x)$ و $\Psi(x)$ على المستقيم $-\infty < x < \infty$. بالتعويض بهما فى العلاقة (9) نحصل على حل المسألة .



شكل ١٦

وفى شكل ١٦ رسم معا المستوى الطورى (x, t) والمستوى (x, u) حيث أعطى الانحراف الابتدائى وامتداده . وفى المستوى الطورى أبرزت الشرائط التى يكون فيها الانحراف مختلفاً عن الصفر (انظر شكل ٧) فرسمت مهشرة . وتبين علامات الزائد

والناقص الموجودة فى هذه الشرائط إشارة (طور) الانحراف (على صورة مثلث متساوى الساقين) .

وبالاستعانة بهذا الرسم من السهل أن نتصور المقطع الجانبى للانحراف فى أية لحظة t . فمثلاً فى اللحظة $t = 2l/a$ نحصل على انحرافات تنطبق على الانحرافات الابتدائية . وبذلك فالدالة $u(x,t)$ ستكون دالة دورية فى المتغير t بفترة دورة $T = 2l/a$ (انظر بند ٣ ، فقرة ٣) .

ندرس الآن مسألة انتشار النظام الحدى . سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

والشروط الحدية

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = \mu(t), \\ u(l, t) = 0 \end{array}\right\} \quad t > 0.$$

ومن نتائج الفقرة ٦ ينتج أنه عند $t < l/a$ يكون الحل هو الدالة

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

حيث

$$\bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

غير أن هذه الدالة لا تحقق الشرط الحدى

$u(l, t) = 0$ عندما $t > l/a$.

ندرس الموجة «المنعكسة» المتجهة إلى اليسار والتى لها عند $x = l$ انحراف يساوى $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$. وتعطى صيغتها التحليلية بالعلاقة

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l - x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

ومن السهل التحقق من أن الفرق بين الموجتين

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)-\bar{\mu}\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right)$$

هو حل المعادلة عند $t<2l/a$.

وبالاستمرار فى هذه العملية نحصل على الحل فى صورة متسلسلة

$$u(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}-\frac{x}{a}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}+\frac{x}{a}\right), \qquad (25)$$

تحتوى (لكل لحظة مثبتة t) على عدد محدود فقط من الحدود المختلفة عن الصفر لأنه مع كل انعكاس جديد ينقص المتغير بمقدار $2l/a$ ، والدالة $\bar{\mu}(t)=0$ فى حالة $t<0$. ويتم التأكد من تحقق الشروط الحدية مباشرة . بالفعل نضع $x=0$ ونفصل من المجموع الأول الحد الأول عند $n=0$ الذى يساوى $\mu(t)$ على انفراد . والحدود الأخرى من المجموع الأول والمجموع الثانى المناظرة لنفس قيم n الواحدة تختصر فيما بينها وهذا يوضح أن $u(0,t)=\mu(t)$.

وبإحلال $n-1$ مكان n وتغيير نهايتى المجموع نتيجة لذلك نحول المجموع الأول إلى الصورة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}+\frac{2l-x}{a}\right).$$

والآن بوضع $x=l$ ، نتأكد مباشرة من أن حدود المجموع الأول والمجموع الثانى تختصر فيما بينها* .

والعلاقة (25) لها معنى فيزيائى بسيط . فالدالة

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

* يتم التحقق من الشروط الابتدائية مباشرة أيضا وذلك لأن متغيرات كل الدوال سالبة عند $t=0$ والصيغة (25) عند $t=0$ تكون مساوية للصفر.

هى عبارة عن موجة ناشئة أو مثارة بالنظام الحدى عند $x = 0$ دون الاعتماد على تأثير الطرف $x = l$ كما لو كان الوتر لانهائيًا ($0 < x < \infty$) . والحدود التالية هى عبارة عن الانعكاسات المتتالية عن الطرف المثبت $x = l$ (المجموع الثانى) وعن الطرف $x = 0$ (المجموع الأول) .

وبالمثل تعطى الدالة

$$u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a}\right)$$

حل المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0$ والشروط الحدية $u(l,t) = \mu(t)$ ، $u(0,t) = 0$. ولن نتوقف عند إثبات وحدانية حل المسألة المعنية والاعتماد المتصل للحل على الشروط الابتدائية والحدية .

فقرة ٨ : تشتت الموجات . إن معادلة ذبذبات الوتر $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ تسمح بحل على صورة موجة جارية $u = f(x \pm at)$ ذات شكل اختيارى . والمعادلة العامة من النمط الزائدى بمعاملات ثابتة

$$\bar{u}_{tt} - a^2\bar{u}_{xx} + b_1\bar{u}_t + b_2\bar{u}_x + \bar{c}\bar{u} = 0 \qquad (26)$$

تؤول بواسطة التعويض المذكور فى الباب الأول

$\bar{u} = ue^{\lambda x + \mu t}$ حيث $\mu = -0.5\, b_1,\ \lambda = -0.5\, b_2/a^2$

إلى المعادلة

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0, \qquad (27)$$

حيث $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. نوضح أن المعادلة (27) لا تسمح بحلول على صورة موجة اختيارية جارية عندما $c \neq 0$. بالفعل بالتعويض فى (27) عن $u = f(x - at)$ نحصل على $a^2f'' - a^2f'' + cf = 0$ ومن هنا نظرًا لأن f اختيارية ينتج أن $c = 0$.

والنبضة أو الإشارة من شكل اختيارى يمكن أن تكون هى التحليل فى تكامل

فورييه الممثل فى صورة تراكب من الموجات التوافقية على الصورة

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

حيث ω التردد ، $k = 2\pi/\lambda$ العدد الموجى ، λ طول الموجة .

والسرعة التى يتحرك بها فى الفراغ طور الموجة $\alpha = \omega t - kx$ تسمى بالسرعة الطورية للموجة وتساوى كما هو واضح $v = \omega/k$. وإذا كانت السرعة الطورية للموجة التوافقية تعتمد على التردد يقال إن الموجات تتشتت . وفى هذه الحالة فإن المركبات التوافقية للإشارة تزاح كل بالنسبة إلى الأخرى فينتج عن ذلك تشوه فى المقطع الجانبى للإشارة .

ومن الواضح أنه إذا كانت المعادلة لا تسمح بحلول على صورة موجات من شكل اختيارى فإن السرعة الطورية للموجة التوافقية تعتمد على التردد أى يوجد تشتت .

نبين أنه للمعادلة (27) يتحقق التشتت عند $c \neq 0$. بالتعويض فى (27) عن $u = e^{i(\omega t - kx)}$ نحصل على معادلة تربط بين ω و k :

$$\omega^2 - a^2k^2 + c = 0.$$

ومن هنا ينتج أن السرعة الطورية

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}}\, a$$

تعتمد على التردد . وعند الشرط $c = 0$ أى لمعادلة ذبذبات الوتر $u_{tt} = a^2u_{xx}$ تكون $v = a$ غير معتمدة على التردد ، وينعدم التشتت . والشرط $c = 0$ يسمى أيضًا بشرط انعدام التشوه أو الاعوجاج (distortion) . وبمثابة مثال ندرس المعادلة التلغرافية (انظر بند ١ ، فقرة ٤)

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + LG)\, i_t + GRi.$$

بفرض $i = ue^{-\mu t}$ حيث $\mu = 0.5(CR + GL)/CL$ نحصل لـ u على المعادلة

$$u_{xx} = CLu_{tt} + \bar{c}u,$$

حيث $\bar{c} = -(CR - LG)^2/4\,CL$. ومن هنا يتضح أنه عندما $CR \neq LG$ تنتشر الإشارة فى الكابل بتشوه لأنه يوجد تشتت للموجات . والشرط

$$CR = LG \quad \text{أو} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

يسمى بشرط انعدام التشوه فى الخط . وفى هذه الحالة تسمح المعادلة التلغرافية بحل على صورة موجة متضائلة

$$i(x, t) = e^{-\gamma t} f(x - at), \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

حيث f دالة اختيارية .

وانعدام تشوه أو اعوجاج الموجات عند انتشارها فى الكابل له أهمية بالغة خاصة فى الاتصالات التلغرافية والتلفونية على المسافات البعيدة .

فقرة ٩ : المعادلة التكاملية للذبذبات . عند استنباط المعادلة التفاضلية للذبذبات (5) فى بند ١ انطلقنا من قانون حفظ كمية الحركة الذى أوصلنا إلى معادلة الذبذبات فى الصورة التكاملية (3). وللانتقال من المعادلة التكاملية إلى المعادلة التفاضلية افترضنا وجود المشتقات الثانية للدالة $u(x, t)$. وكل افتراض لتحديد فئة الدوال المدروسة بخاصية ما يعنى الامتناع عن دراسة الدوال التى لا تتميز بالخاصية المفترضة . وبذلك فبالانتقال من المعادلة التكاملية للذبذبات إلى المعادلة التفاضلية استثنينا من مجال دراستنا عمليات الذبذبات التى لا تحقق مطلب القابلية للتفاضل مرتين .

وسنوضح أن كل النظرية يمكن تطويرها فى فئة الدوال المتصلة المتقطعة القابلية للتفاضل (continuous piecewise differentiable functions) انطلاقًا من المعادلة التكاملية للذبذبات .

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_1} \right] \rho \, d\xi =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_2} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F \, d\xi \, d\tau. \tag{28}$$

ويمكن إعطاء هذه المعادلة الصورة التالية . ندرس فى المستوى (x, t) المنطقة G المحدودة بالمنحنى المتقطع الملوسة (أو السلاسة) (piecewise smooth) C . ونوضح أنه لهذه المنطقة تتحقق العلاقة التكاملية

$$\int_C \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + k \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \iint_G F \, dx \, dt = 0. \tag{29}$$

وللوسط المتجانس تتخذ هذه العلاقة الصورة :

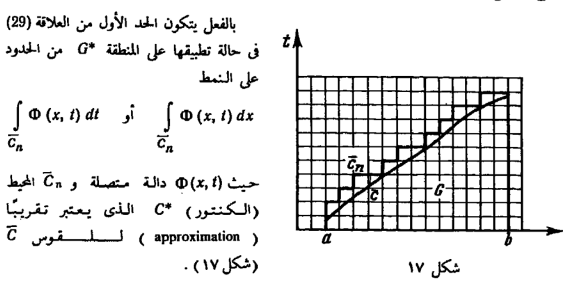
$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx + a^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) + \iint_G f\,dx\,dt = 0 \quad \left(f = \frac{F}{\rho}\right). \qquad (29')$$

وإذا كان المنحنى C هو عبارة عن محيط مستطيل أضلاعه موازية لمحورى الإحداثيات فإن العلاقة (29) تنطبق على المعادلة (28) . وإذا كان المنحنى C يتكون من قطع موازية للمحورين فإن المنطقة G يمكن تصورها كمجموع مستطيلات . وبتجميع التكاملات الخطية (على المحيطات) المناظرة لحدود مجموع المستطيلات كل على انفراد نجد أن حدود المجموع المناظرة للحدود الداخلية (المحيطات الداخلية) تختصر فيا بينها - لأن عملية التكامل تتم فى اتجاهات متضادة وتعطى الحدود الباقية فى المجموع العلاقة (29) . نفرض بعد ذلك أن المنحنى C يحتوى الأقواس $\bar{C}$ غير الموازية للمحورين والتى لا تعتبر خطوط إنفصال للدالة المكاملة . نأخذ شبكة أضلاعها توازى محورى الإحداثيات وندرس خلايا الشبكة المتقاطعة مع المنطقة G. نرمز بالرمز G^* إلى مجمل مثل هذه الخلايا وبالرمز C^* إلى حدود المنطقة G^* . تكون العلاقة (29) صحيحة بالنسبة للمنطقة G^* . وبالانتقال إلى النهاية مع تناقص أبعاد الشبكة ليس من العسير التأكد من صحة العلاقة (29) للمنحنى النهائى C .

بالفعل يتكون الحد الأول من العلاقة (29) فى حالة تطبيقها على المنطقة G^* من الحدود على النمط

$$\int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t)\,dx \quad \text{أو} \quad \int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t)\,dt$$

حيث $\Phi(x, t)$ دالة متصلة و $\bar{C}_n$ المحيط (الكنتور) C^* الذى يعتبر تقريبًا (approximation) للقوس $\bar{C}$ (شكل ١٧) .



شكل ١٧

نفرض أن $t = t_n(x)$ معادلة المنحنى $\bar{C}_n$ و $t = t(x)$ معادلة المنحنى $\bar{C}$. من الواضح أن $t_n(x)$ تتقارب بانتظام إلى $t(x)$ و

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi[x, t_n(x)]\,dx = \int_a^b \Phi[x, t(x)]\,dx,$$

مما يثبت قانونية الانتقال إلى النهاية* .

* حيث إن $dx = 0$ على الأجزاء الرأسية للخط المتكسر $\bar{C}_n$ فإن $t = t_n(x)$ فى هذه العلاقة تكون هى معادلة الأجزاء الأفقية للمنحنى C_n .

وإذا كان المنحنى C يحتوى أقواسًا تعتبر خطوط انفصال للدالة المكاملة فإن العلاقة (29) تحتفظ بصحتها إذا أخذنا بمثابة قيم الدالة المكاملة قيمها النهائية من الناحية الداخلية للمنطقة G . وبذلك أثبتنا صحة العلاقة (29).

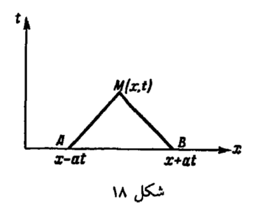
ندرس المسألة التالية :

عين الدالة $u(x, t)$ المعرفة والمتقطعة الملوسة فى المنطقة $-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0$ والتى تحقق المعادلة :

$$\int\limits_C \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) + \iint\limits_G f(x, t)\, dx\, dt = 0 \tag{29'}$$

والشروط الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$



شكل ١٨

حيث $\varphi(x)$ دالة متقطعة الملوسة ، و $f(x, t)$ ، $\psi(x)$ دالتان متقطعتا الاتصال . وهنا C محيط (كنتور) متقطع الملوسة اختيارى يقع فى المنطقة $t \geqslant 0$. نوضح أن لهذه المسألة حلاً وحيدًا يتحدد بعلاقة دالمبرت .

نفرض أن الدالة $u(x, t)$ هى حل مسألتنا . ندرس المثلث ABM (شكل ١٨) الملامس للمحور $t = 0$ ورأسه فى المنطقة $M(x, t)$ وضلعاه يعتبران جزأين من المميزتين $x + at = \text{const}$ ، $x - at = \text{const}$ ونطبق عليه العلاقة (29'). على امتداد المستقيم AM تتحقق المتساوية $\frac{dx}{dt} = a$ ومن ثم فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = a\left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) = a\, du.$$

على امتداد المستقيم MB تتحقق المتساوية $\frac{dx}{dt} = -a$ ومن ثم فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = -a\left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) = -a\, du.$$

وبالتالى فالصيغة المكاملة على امتدادى المميزتين تعتبر تفاضلاً تامًا . وبإجراء التكامل على امتدادى BM و MA نحصل على :

$$\int\limits_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t}\, dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dt\right) = -a\,[u(M) - u(B)],$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right) = a\,[u(A) - u(M)].$$

ومن ثم تأخذ العلاقة (′29) الصورة

$$u(M) = \frac{u(B)+u(A)}{2} + \frac{1}{2a}\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{1}{2a}\iint_{ABM} f\,dx\,dt$$

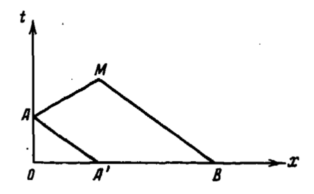
أو

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (30)$$

وبذلك فإذا وجد حل المسألة المصاغة فإنه يتحدد تحديدًا أحادى القيمة بقيمه الابتدائية . وفى حالة المعادلة المتجانسة($f = 0$)تنطبق هذه العلاقة على علاقة دالمبرت . ومن هنا تنتج نظرية الوحدانية للمسألة محل الدراسة .

وليس من الصعب التحقق بالتعويض المباشر من أن الدالة على النمط

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) + \int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi,\tau)\,d\xi,$$



شكل ١٩

حيث f_1 , f_2 دالتان متقطعتا الملوسة ، f_3 دالة متقطعة الاتصال ، تحقق المعادلة (28) ومن ثم المعادلة (′29) . وهذا يثبت نظرية الوجود . وحلول المسائل المدروسة فى فقرة ٣ بمثابة أمثلة تعتبر دوال متقطعة الملوسة وتشملها النظرية المشروحة .

وننتقل الآن إلى المسألة الحدية الأولى على المستقيم نصف اللانهائى . سنبحث عن حل المعادلة (29) فى نقطة ما $M(x,t)$ لحالة $t > x/a$ (شكل ١٩) لأنه فى المنطقة $t < x/a$ (تحت المميزة $x = at$) لا يحدث تأثير الشروط الحدية ويتحدد الحل بالعلاقة (30) . نطبق العلاقة (′29) على الشكل الرباعى $MAA'B$ الذى فيه AA' , MB , MA أجزاء من المميزات . وباجراء التكامل على امتداد المميزات BM , AA' , MA نحصل على :

$$2au(M) = 2au(A) + au(B) - au(A') + \int_{A'}^B \frac{\partial u}{\partial t}dx + \iint_{MAA'B} f\,dx\,dt.$$

وبالتعويض هنا عن إحداثيات النقط M, A, B, A' سنحصل على :

$$u(x,t)=u\left(0,t-\frac{x}{a}\right)+\frac{u(x+at,0)-u(at-x,0)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}dx+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

أو

$$u(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\quad\left(t>\frac{x}{a}\right).\qquad(31)$$

ومن (31) تنتج مباشرة وحدانية حل المسألة محل الدراسة .

وعندما $f=0$ تنطبق هذه العلاقة ، كما يسهل ملاحظة ذلك ، على العلاقة (24) بند ٢ ، فقرة ٦ . وتدرس بطريقة مماثلة المسألة الحدية الثانية أيضًا وكذلك المسائل للمستقيم المحدود .

وعند دراسة المسألة الحدية الأولى رأينا أن إعطاء الشرطين الابتدائيين

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$$

وشرط حدى واحد

$$u(0,t)=\mu(t)$$

يكفي للتعيين التام للحل . ومن هنا ينتج أنه يجب أن توجد علاقة تربط بين الدوال ν ، μ، ψ، φ حيث $\nu(t)=u_x(0,t)$. بتفاضل العلاقة (31) بالنسبة إلى x ووضع $x=0$ نحصل على :

$$\nu(t)=\frac{1}{a}\{\psi(at)-[\mu'(t)-a\varphi'(at)]\},\qquad(32)$$

حيث وضعنا للبساطة $f=0$. وبالاستعانة بالعلاقة (32) يمكن مثلاً أن نجعل المسألة الحدية الثالثة تؤول إلى المسألة الحدية الأولى .

فقرة ١٠ : انتشار الانفصالات على امتداد المميزات . ننتقل إلى دراسة انفصالات مشتقات حلول المعادلة (29) . وسنبين أن خطوط انفصال مشتقى الدالة $u(x,t)$ اللتين تحققان المعادلة (29) يمكن أن تكون فقط هى خطوط عائلات المميزات

$$x-at=\text{const},\quad x+at=\text{const}.$$

بالفعل . نفرض أن منحنى ما قابلا للتفاضل معرفًا بالمعادلة

$$x = x(t),$$

هو خط انفصال مشتقى الدالة المتصلة المتقطعة القابلية للتفاضل $u(x, t)$. نفرض للتحديد أن $x(t)$ دالة متزايدة . نطبق العلاقة (29′) على المستطيل $ABCD$ (شكل ٢٠) :

شكل ٢٠

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) = 0,$$

وكذلك على المثلثين المنحنيين $\Delta_2 = BDC$ ، $\Delta_1 = BAD$:

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 dt = 0,$$

$$\int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 dt = 0,$$

حيث الأقواس $(\quad)_{1,2}$ توضح أنه يجب أخذ القيم النهائية من داخل المثلثين Δ_1 أو Δ_2 . وبطرح المتساوية السابقة من مجموع المتساويتين الأخيرتين نحصل على :

$$\int_{DB} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 \right\} dt = 0$$

أو وفقًا لصغر القوس DB صغرًا اختياريًا

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] x' + a^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \tag{33}$$

حيث نرمز كالمعتاد لقيمة انفصال الدالة بالقوسين :

$$[f] = f_2 - f_1.$$

نأخذ المشتقة بالنسبة إلى t لقيمة الدالة $u(x, t)$ على امتداد خط انفصال المشتقات :

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i x' + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i \qquad (i = 1, 2),$$

علمًا بأنه بمثابة قيمة المشتقات يمكن أن نأخذ القيم النهائية سواء من Δ_1 أو من Δ_2 . والفرق بين الطرفين الأيمنين عند $i = 1$ ، $i = 2$ يعطى :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] + x'\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0.$$

وبمقارنة هذه المتساوية بالمتساوية (33) وافتراض أن أحد الانفصالين $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ ، $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$ على الأقل لا يساوى الصفر نرى أن هاتين المتساويتين يمكن أن تتحققا فى آن واحد إذا كان محدد هذه المجموعة مساويًا للصفر :

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0$$

أو

$$x = \pm at + \text{const.}$$

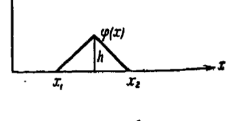
وبذلك فإن خطوط انفصال مشتقى حل معادلة الذبذبات هى المميزات .

مسائل :

١ ـ ارسم المقطع الجانبى للوتر فى لحظات مختلفة فى الحالات التالية :

I. الوتر اللانهائى ($-\infty < x < \infty$) .

(أ) السرعة الابتدائية تساوى صفرًا ($\psi(x) = 0$) والمقطع الجانبى الابتدائى معطى على الصورة المبينة بشكل ٢١ .



شكل ٢١

(ب) الانحراف الابتدائى يساوى الصفر والسرعة الابتدائية لها قيمة ثابتة $u_t(x, 0) = \psi_0$ على جزء الوتر (x_1, x_2) ومساوية للصفر خارج هذا الجزء .

(جـ) الشروط الابتدائية على الصورة التالية :

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < c \text{ عند}) \\ \dfrac{h}{2c^2}\, x(2c - x) & (c < x < 2c \text{ عند}) \\ 0 & (x > 2c \text{ عند}) \end{cases}$$

II. الوتر نصف اللانهائى ($0 \leqslant x < \infty$) .

(د) السرعة الابتدائية تساوى صفرًا ($\psi(x) = 0$) والانحراف الابتدائى معطى فى صورة المثلث المبين بشكل ٢١ . طرف الوتر مثبت .

(هـ) نفس المسألة للوتر ذى الطرف الحر $x = 0$.

(و) الشروط الابتدائية على الصورة

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < c \text{ عند}) \\ \psi_0 = \text{const} & (c < x < 2c \text{ عند}) \\ 0 & (x > 2c \text{ عند}) \end{cases}$$

طرف الوتر $x = 0$ مثبت .

(ز) نفس المسألة للوتر ذى الطرف الحر $x = 0$. ينبغى رسم المقطع الجانبى لجميع المسائل (أ) - (ز) فى اللحظات الزمنية

$$t_0 = 0, \; t_k = \frac{c}{8a} k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 8).$$

بين للمسائل (أ) - (ز) على المستوى الطورى (x, t) المناطق المناظرة للمراحل المختلفة للعملية .

٢ - عين حل المسألة ١ (أ) لجميع قيم المتغيرين x, t (العلاقات التى تعبر عن الدالة $u(x, t)$ مختلفة لمناطق المستوى الطورى المختلفة) .

٣ - عين الانحراف فى نقطة ما x_0, t_0 بالاستعانة بالمستوى الطورى (x, t) والمستوى (x, u) الذى (شكل ٢١) معطاة فيه الانحرافات الابتدائية $(\psi = 0)$ سواء لحالة الوتر اللانهائى أو لحالة الوتر نصف اللانهائى ذى الطرف المثبت (أو الحر) .

٤ - فى بداية أنبوبة أسطوانية طويلة مملوءة بغاز يوجد كباس يتحرك وفقًا لقانون اختيارى $x = f(t)$ بسرعة $v = f'(t) < a$. الإزاحة الابتدائية والسرعة الابتدائية لجسيمات الغاز تساويان الصفر . عين إزاحة الغاز فى المقطع ذى الإحداثى الأفقى x . ادرس حالة حركة الكباس بسرعة ثابتة $c < a$. ماذا يمكن قوله عن حل المسألة إذا كانت سرعة الكباس $v > a$ ابتداء من لحظة معينة ؟ (انظر الملحق ٥ ، للباب الثانى) .

٥ - نفرض أن فى وتر لانهائى تجرى الموجة $u(x, t) = f(x - at)$. اعتبر حالة الوتر فى اللحظة $t = 0$ هى الحالة الابتدائية وحل معادلة الذبذبات بالشروط الابتدائية المناظرة . قارن مع المسألة ١ (أ) .

٦ - قضيب لانهائى مرن ناتج باتصال قضيبين عند $x = 0$ بالمميزات

$$k_1, \quad \rho_1, \quad a_1 = \sqrt{k_1/\rho_1} \qquad (x < 0 \text{ عند})$$

$$k_2, \quad \rho_2, \quad a_2 = \sqrt{k_2/\rho_2} \qquad (x > 0 \text{ عند})$$

(أ) نفرض أنه من المنطقة $x < 0$ تجرى الموجة

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

حيث f دالة معطاة . عين معاملى الانعكاس والانكسار للموجة عند مرورها بنقطة الالتحام $(x = 0)$. بين عند أية شروط تنعدم الموجة المنعكسة .

(ب) حل المسألة المماثلة إذا أعطى الانحراف الابتدائى المحلى

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & (\text{عند } x<x_1)\\ \varphi(x) & (\text{عند } x_1<x<x_2<0)\\ 0 & (\text{عند } x>x_2)\end{cases}$$

وكانت السرعة الابتدائية تساوى الصفر.

٧ ـ نفرض أنه فى نقطة ما $x = x_0$ على الوتر معلق ثقل كتلته M . ومن المنطقة $x < 0$ تجرى الموجة

$$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

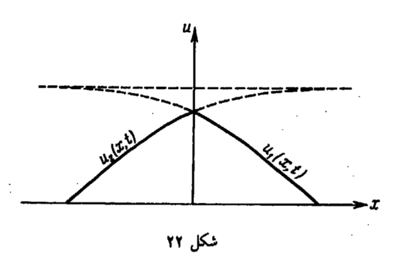
عين الموجة المنكسرة والموجة المنعكسة.

٨ ـ أنبوبة نصف لانهائية $(x > 0)$ مملوءة بغاز مثالى يوجد على طرفها $x = 0$ كباس كتلته M يتحرك بحرية. وفى اللحظة الزمنية $t = 0$ يكتسب الكباس بواسطة صدمة سرعة ابتدائية v_0 . عين عملية انتشار الموجة فى الغاز إذا علم أن السرعة الابتدائية والانحراف الابتدائى لجسيمات الغاز يساويان الصفر.

إرشاد: ادرس حل معادلة الذبذبات فى المنطقة $x > 0$. استعن بالشرط الحدى

$$Mu_{tt}(0,t)=S\gamma p_0 u_x(0,t)$$

(p_0 الضغط الابتدائى للغاز ، S مساحة المقطع العرضى للأنبوبة ، $\gamma=\frac{c_p}{c_v}$) والشروط الابتدائية على الحدود $u(0,0) = 0,\ u_t(0,0) = v_0$.



شكل ٢٢

٩ ـ وتر لا نهائى ذو كتلة مركزة M عند $x = 0$ موجود فى وضع الاتزان. وفى اللحظة الابتدائية $t = 0$ تكتسب الكتلة M بصدمة سرعة ابتدائية v_0 . أثبت أنه فى اللحظة الزمنية $t > 0$ يكون اضطراب الوتر على الصورة المبينة بشكل ٢٢ حيث $u_2(x,t)$ ، $u_1(x,t)$ معرفتان بالعلاقتين

$$u_1(x,t)=\begin{cases}\frac{Mav_0}{2T}\left[1-e^{\frac{2T}{Ma^2}(x-at)}\right] & (x-at<0 \text{ عند}) \text{ (موجة مباشرة)}\\ 0 & (x-at>0 \text{ عند})\end{cases}$$

$$u_2(x,t)=\begin{cases}\frac{Mav_0}{2T}\left[1-e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)}\right] & (x-at<0 \text{ عند}) \text{ (موجة مرتدة)}\\ 0 & (x-at>0 \text{ عند})\end{cases}$$

إرشاد : استعن بالشرط

$$M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0,t)=M\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0,t)=T\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t)-T\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t).$$

١٠ ـ حل مسألة انتشار الذبذبات الكهربائية فى سلك لانهائى بالشرط

$$\frac{G}{C}=\frac{R}{L}$$

وبشروط ابتدائية اختيارية .

١١ ـ عين حل المعادلة التكاملية للذبذبات للوتر نصف اللانهائى بشروط حدية من النوع الثالث (انظر فقرة ٩) .

١٢ ـ فى الطرف $x=0$ لقضيب نصف لانهائى ثبت غشاء يحدث مقاومة للذبذبات الطولية للقضيب تتناسب مع السرعة $u_t(0,t)$. عين عملية الذبذبة إذا أعطى الانحراف الابتدائى و $u_t(x,0)=\psi(x)=0$.

بند ٣ ـ طريقة فصل المتغيرات

فقرة ١ : معادلة الذبذبات الحرة للوتر . إن طريقة فصل المتغيرات أو طريقة فوريبه تعتبر واحدة من أكثر الطرق شيوعًا وانتشارًا لحل المعادلات التفاضلية الجزئية . وسنشرح هذه الطريقة لمسألة تذبذبات الوتر المثبت من طرفيه . وحل المسألة المذكورة سندرسه بتفصيل تام وعند الشرح التالى للمنهج سوف نعتمد على هذا البند ونشير إليه دون أن نكرر الإثباتات .

وهكذا سنبحث عن حل المعادلة

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \tag{1}$$

الذى يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 \tag{2}$$

والشروط الابتدائية

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

المعادلة (1) خطية ومتجانسة ولذا فإن مجموع الحلول الخاصة يعتبر أيضًا حلاً لهذه المعادلة . وبالحصول على عدد كبير بقدر كاف من الحلول الخاصة يمكن محاولة تعيين الحل المطلوب بتجميعها بمعاملات معينة .

نصيغ المسألة المساعدة الأساسية ·

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

الذى لا يساوى الصفر بالتطابق والذى يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= 0, \\ u(l,\ t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

والقابل للتعبير عنه فى صورة حاصل الضرب

$$u(x,\ t) = X(x)\, T(t), \tag{5}$$

حيث $X(x)$ دالة فى المتغير x فقط ، $T(t)$ دالة فى المتغير t فقط .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل (5) فى المعادلة (1) نحصل على :

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

أو بعد القسمة على XT

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

ولكى تكون الدالة (5) حلاً للمعادلة (1) يجب أن تتحقق المتساوية (6) بالتطابق ، أى تتحقق لجميع قيم المتغيرين المستقلين $0 < x < l,\ t > 0$. والطرف الأيمن للمتساوية (6) هى دالة فقط فى المتغير t والطرف الأيمن دالة فقط فى المتغير x . فمثلاً بتثبيت x عند قيمة معينة وتغيير t (أو بالعكس) نجد أن

الطرفين الأيمن والأيسر للمتساوية (6) يحتفظان عند تغيير متغيريهما بقيمة ثابتة

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

حيث λ ثابت نأخذه لسهولة الاستنتاجات والتحليلات التالية بعد ذلك باشارة سالبة دون أن نفترض شيئًا عند ذلك عن إشارته .

ومن العلاقة (7) نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين لتعيين $T(t)$ ، $X(x)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \tag{8}$$
$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \tag{9}$$

والشروط الحدية (4) تعطى

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$
$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

ومن هنا ينتج أن الدالة $X(x)$ يجب أن تحقق الشرطين الإضافيين

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

وإلا فقد كنا سنحصل على

$$T(t) \equiv 0 \quad , \quad u(x, t) \equiv 0,$$

فى حين أن المسألة تنحصر فى تعيين الحل غير التافه (غير الصفرى) . ولا توجد أية شروط إضافية على الدالة $T(t)$ فى المسألة المساعدة الأساسية .

وبذلك فنتيجة لتعيين الدالة $X(x)$ نصل إلى مسألة بسيطة هى مسألة القيم الذاتية (proper values) :

عين قيم البارامتر λ التى يوجد عندها حل غير تافه للمسألة :

$$\left.\begin{aligned} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

وكذلك عين هذه الحلول . وهذه القيم للبارامتر λ تسمى بالقيم الذاتية، والحلول غير

التافهة المناظرة لهذه القيم تسمى بالدوال الذاتية للمسألة (11) . والمسألة المصاغة بهذه الطريقة تسمى عادة بمسألة شتورم ـ ليوفيل .

ندرس على انفراد الحالات التى يكون فيها البارامتر λ سالبًا أو مساويًا للصفر أو موجبًا .

١ ـ عندما $\lambda < 0$ لا يوجد للمسألة حلول غير تافهة . بالفعل يكون الحل العام للمعادلة (8) على الصورة :

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}.$$

وتعطى الشروط الحدية :

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$
$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \qquad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

أى أن

$$C_1 = -C_2 \quad , \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

ولكن α فى هذه الحالة التى ندرسها عدد حقيقى موجب ومن ثم فإن $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$ ولذا فإن

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

وبالتالى

$$X(x) \equiv 0.$$

٢ ـ عندما $\lambda = 0$ أيضًا لا توجد حلول غير تافهة . وبالفعل ، فى هذه الحالة يكون الحل العام للمعادلة (8) على الصورة

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

وتعطى الشروط الحدية :

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$
$$X(l) = C_1 l = 0,$$

أى أن $C_2 = 0$, $C_1 = 0$ وبالتالى

$$X(x) \equiv 0.$$

٣ ـ عندما $\lambda > 0$ يمكن كتابة الحل العام للمعادلة فى الصورة :

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x.$$

والشروط الحدية تعطى :

$$X(0) = D_1 = 0,$$
$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0$$

وإذا كانت $X(x)$ لا تساوى الصفر بالتطابق فإن $D_2 \neq 0$ ولذا فإن

$$\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0 \tag{12}$$

أو

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

حيث n أى عدد صحيح . وبالتالى فالحلول غير التافهة للمسألة (11) ممكنة الوجود فقط عند القيم

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

وهذه القيم الذاتية تناظرها الدوال الذاتية

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث D_n ثابت اختيارى .

وهكذا ففقط عند قيم λ المساوية

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \tag{13}$$

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية بالتطابق) للمسألة (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

محددة بدقة حتى معامل اختيارى وضعناه يساوى الواحد الصحيح (فى العلاقة

(14)) . وهذه القيم λ_n تناظرها حلول للمعادلة (9) على الصورة :

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at, \tag{15}$$

حيث B_n , A_n ثوابت اختيارية .

وبالانتقال إلى المسائل (3)—(1) نستنتج أن الدوال

$$u_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{16}$$

تعتبر حلولاً خاصة للمعادلة (1) تحقق الشروط الحدية (4) وقابلة للتمثيل فى صورة حاصل الضرب (5) لدالتين إحداهما دالة تعتمد فقط على x والأخرى تعتمد فقط على t . وهذه الحلول يمكن أن تحقق الشروط الابتدائية (3) لمسألتنا الأصلية فقط لحالات خاصة للدالتين $\psi(x)$, $\varphi(x)$.

ننتقل إلى حل المسألة (3)—(1) فى الحالة العامة . وفقًا لخطية وتجانس المعادلة (1) فإن مجموع الحلول الخاصة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{17}$$

يحقق أيضًا هذه المعادلة والشروط الحدية (2). وسنتوقف عند هذا الموضوع فيما بعد (انظر الفقرة ٣ من هذا البند) . والشروط الابتدائية تكفل تعيين A_n و B_n . وستتطلب أن تحقق الدالة (17) الشروط (3) :

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin\frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ومن نظرية متسلسلات فوربيه نعلم أن الدالة الاختيارية $f(x)$ متقطعة الاتصال ومتقطعة القابلية للتفاضل المعرفة فى الفترة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l$ تحلل فى متسلسلة فوربيه

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{19}$$

حيث *

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi. \tag{20}$$

إذا كانت الدالتان $\varphi(x)$ و$\psi(x)$ تحققان شروط التحليل فى متسلسلة فورييه فإن :

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi. \tag{22}$$

وتبين مقارنة هاتين المتسلسلتين بالعلاقة (18) أنه لتحقق الشروط الابتدائية يجب وضع

$$A_n=\varphi_n, \quad B_n=\frac{l}{\pi n a}\psi_n, \tag{23}$$

---

* عادة تدرس الدوال الدورية ذات فترة الدورة $2l$:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}F(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi, \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi.$$

واذا كانت الدالة $F(x)$ دالة فردية فإن $a_n=0$ ومن ثم فإن

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x; \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi=\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi.$$

وإذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة فقط فى الفترة $(0, l)$ فإنه يمكن استكمالها فرديا وتكوين التحليل فى الفترة من $-l$ إلى $+l$ مما يؤدى بنا إلى العلاقتين (19) و (20) (انظر كتاب بيسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الثانى باللغة العربية طبعة دار « مير ») .

مما يحدد تماماً الدالة (17) التى تعطى حل المسألة المدروسة .

لقد عينا الحل فى صورة متسلسلة لانهائية (17) . وإذا كانت المتسلسلة (17) تتباعد أو الدالة المعرفة بهذه المتسلسلة ليست قابلة للتفاضل فإن هذه المتسلسلة بالطبع لا يمكن أن تعتبر حلاً لمعادلتنا التفاضلية .

وفى هذه الفقرة نكتفى بالتكوين الشكلى (الصورى) للحل . أما توضيح الشروط التى بتحققها تتقارب المتسلسلة (17) وتعتبر حلاً للمعادلة فسنورده فى الفقرة ٣ .

فقرة ٢ : تفسير الحل . ننتقل الآن إلى تفسير الحل الناتج . الدالة $u_n(x, t)$ يمكن التعبير عنها فى الصورة :

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x =$$
$$= \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (24)$$

حيث*

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a\delta_n = -\operatorname{arctan} \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

وكل نقطة على الوتر x_0 تتذبذب ذبذبات توافقية

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

بالسعة

$$\alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0 .$$

وتسمى حركة الوتر على هذا النمط بالموجة المستقرة (أو الراهنة stationary wave) . والنقط $x = m \frac{l}{n} (m = 1, 2, \ldots, n-1)$ التى يكون فيها $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ تظل خلال كل العملية ثابتة وتسمى بعقد الموجة المستقرة $u_n(x, t)$. والنقط $x = \frac{2m+1}{2n} l \, (m = 0, 1, \ldots, n-1)$ التى يكون فيها

* $\operatorname{arctan} \frac{B_n}{A_n}$ يرمز لها فى بعض المراجع بالرمز $\tan^{-1} \frac{B_n}{A_n}$ (ملاحظة المترجم) .

$\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ تتذبذب بأكبر سعة a_n وتسمى ببطون (antinodes) الموجة المستقرة .

والمقطع الجانبى للموجة المستقرة فى أية لحظة زمنية يكون عبارة عن منحنى جيبى (سينوسويد)

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث

$$C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

وفى اللحظات الزمنية t التى عندها يكون $\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$ تصل الانحرافات إلى قيمها العظمى وسرعة الحركة تكون مساوية للصفر . وفى اللحظات الزمنية t التى عندها $\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$ يكون الانحراف مساويًا للصفر وسرعة الحركة تصل إلى قيمتها العظمى . وترددات ذبذبات كل نقط الوتر متساوية وتساوى

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \tag{26}$$

والترددات ω_n تسمى بالترددات الذاتية لذبذبات الوتر . وللذبذبات المستعرضة للوتر $a^2 = T/\rho$ وبالتالى فإن

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{27}$$

وطاقة الموجة المستقرة الـ n (التوافقية الـ n) لحالة الذبذبات المستعرضة للوتر تساوى :

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho\omega_n^2 \sin^2 \omega_n (t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + \right.$$

$$\left. + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho\omega_n^2 \sin^2 \omega_n (t + \delta_n) + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t + \delta_n)\right], \tag{28}$$

وذلك لأن

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x\, dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x\, dx = \frac{l}{2}.$$

وبالاستعانة بصيغتى ω_n، α_n وكذلك بالمتساوية $T = a^2\rho$ نحصل على :

$$E_n = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \qquad (29)$$

حيث $M = l\rho$ كتلة الوتر .

ونشعر نحن عادة بذبذبات الوتر من الصوت الصادر عن الوتر . ودون أن نتوقف عند عملية انتشار الذبذبات فى الهواء والشعور بالذبذبات الصوتية فى أذننا يمكن القول بأن صوت الوتر هو عبارة عن تراكب «النغمات البسيطة» المناظرة للموجات المستقرة التى تحلل إليها الذبذبات . وهذا التحليل للصوت إلى نغمات بسيطة لا يعتبر عملية ذات طابع رياضى فقط . فيمكن إبراز وفصل النغمات البسيطة فى التجارب المعملية بواسطة جهاز المرنان (resonator) .

ويعتمد ارتفاع النغمة على تردد الذبذبات المناظرة لهذه النغمة . وتتحدد قوة النغمة بطاقتها وبالتالى بسعتها . وأكثر النغمات انخفاضًا التى يمكن أن تصدر عن الوتر تتحدد بأكثر الترددات الذاتية انخفاضًا $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ وتسمى بالنغمة الأساسية للوتر . والنغمات الأخرى المناظرة للترددات مضاعفات ω_1 تسمى بالنغمات المتوافقة (overtons) . ويعتمد جرس الصوت (timbre) على وجود النغمات المتوافقة بالإضافة إلى النغمة الأساسية وعلى توزيع الطاقة على التوافقيات .

وتعتمد النغمة الأكثر انخفاضًا للوتر وجرسها على طريقة إثارة الذبذبات . بالفعل فطريقة إثارة الذبذبات تحدد الشروط الابتدائية :

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad (3)$$

التى يتم التعبير بدلالتها عن المعاملات B_n , A_n . وإذا كان $A_1 = B_1 = 0$ فإن النغمة الأكثر انخفاضًا ستكون هى النغمة المناظرة للتردد ω_n حيث n هو أصغر عدد يكون عنده A_n أو B_n مختلفًا عن الصفر .

وعادة يصدر الوتر نفس النغمة الواحدة . بالفعل نحدث فى الوتر ذبذبة بشده إلى ناحية وتركه بلا سرعة ابتدائية . وفى هذه الحالة يكون

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

و

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi \, d\xi > 0,$$

وذلك لأن

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

والمعاملات التالية تكون بوجه عام أصغر كثيرًا من A_1 لأن الدالة $\sin \frac{n\pi}{l} \xi$ تكون متعاقبة الإشارة عندما $n \geqslant 2$. وكحالة خاصة إذا كانت $\varphi(x)$ متماثلة بالنسبة إلى منتصف الفترة فإن $A_2 = 0$. وبذلك فإذا أحدثنا فى الوتر ذبذبات بشده إلى ناحية ما $(\varphi(x) > 0)$ فإن النغمة الأكثر انخفاضًا ستكون هى النغمة الأساسية للوتر التى طاقتها بوجه عام تكون أكبر من طاقة التوافقيات الأخرى .

ويمكن إحداث ذبذبات فى الوتر بطرق أخرى أيضًا . فعلى سبيل المثال إذا كانت الدالة الابتدائية فردية بالنسبة إلى منتصف الوتر فإن

$$A_1 = 0$$

وتناظر النغمة الأكثر انخفاضًا التردد التالى :

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

وإذا لمسنا الوتر المصدر للصوت عند منتصفه بالضبط فإن صوته يتغير بحدة وتصدر جوابًا (octave) على نغمتها . وهذه الطريقة لتغيير النغمة تستخدم كثيرًا عند العزف على الكمان والقيثارة (الجيتار) والآلات الوترية الأخرى وتسمى الفلاجيوليت (flageolet) . وهذه الظاهرة واضحة تمامًا من وجهة نظر نظرية ذبذبة الوتر ، ففى لحظة لمس منتصف الوتر نلغى الموجات المستقرة التى يكون لها فى هذه النقطة بطون ونحتفظ فقط بالتوافقيات التى لها فى هذه النقطة عقد . وبذلك

تظل باقية التوافقيات الزوجية فقط . ويكون التردد الأكثر انخفاضًا هو

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,.$$

وإذا لمسنا الوتر عند نقطة تبعد عن طرفه بمسافة ثلث طوله فإن ارتفاع (علو) النغمة الأساسية يعلو ثلاث مرات لأنه عند ذلك تظل باقية تلك التوافقيات فقط التى لها عقد عند النقطة $x = l/3$.

والعلاقتان

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad , \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}\,, \tag{30}$$

اللتان تحددان على الترتيب التردد وفترة الدورة للذبذبة الأساسية تفسران القوانين التالية لذبذبة الوتر التى اكتشفت فى البداية بالتجارب المعملية (قوانين ميرسين) :

١ ـ للأوتار المتشابهة فى الكثافة والمشدودة بطريقة واحدة تتناسب فترة دورة ذبذبة الوتر مع طوله .

٢ ـ تتغير فترة الدورة عند الطول المعطى للوتر (عند ثبات الطول) متناسبة عكسيًّا مع الجذر التربيعى للشد .

٣ ـ عند الطول والشد المعطيين (عند ثبات الطول والشد) تتناسب فترة الدورة مع الجذر التربيعى للكثافة الخطية للوتر .

وهذه القواعد يمكن توضيحها عمليًّا بسهولة على الجهاز الوحيد الوتر .

وفى هذه الفقرة درسنا الموجات المستقرة الناشئة عند ذبذبة الوتر المثبت الطرفين . ومسألة وجود حل على الصورة

$$u(x, t) = X(x)\,T(t)$$

تكافئ مسألة وجود الموجات المستقرة لأن المقاطع الجانبية لهذا الحل فى اللحظات الزمنية المختلفة تكون متناسبة .

فقرة ٣ : التعبير عن الذبذبات الاختيارية فى صورة تراكب من الموجات المستقرة. فى فقرة ١ درسنا مسألة الذبذبات الحرة للوتر المثبت الطرفين وأثبتنا وجود

حلول خاصة فى صورة موجات مستقرة . وفى نفس الفقرة أعطينا صيغة شكلية لتمثيل الذبذبة الاختيارية فى صورة مجموع لانهائى من الموجات المستقرة . وفى هذه الفقرة يعطى التبرير لإمكانية تمثيل الحل الاختيارى فى صورة تراكب موجات مستقرة . وفى الدرجة الأولى ندرس تعميم مبدأ التراكب المعروف جيدًا للمجاميع النهائية على حالة المتسلسلات اللانهائية .

نفرض أن $L(u)$ مؤثر تفاضلى خطى بحيث إن $L(u)$ يكون مساويًا لمجموع بعض مشتقات الدالة (العادية أو الجزئية) بمعاملات هى عبارة عن دوال فى المتغيرات المستقلة .

نثبت المأخوذة التالية (المبدأ المعمم للتراكب) :

إذا كانت الدوال u_i $(i=1,2,\dots,n,\dots)$ حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $L(u)=0$ (التفاضلية العادية أو التفاضلية الجزئية) فإن المتسلسلة $u=\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ تكون أيضًا حلاً لهذه المعادلة إذا أمكن حساب مشتقات u الموجودة فى المعادلة $L(u)=0$ بواسطة عملية تفاضل المتسلسلة حدًّا حدًّا .

بالفعل إذا كانت مشتقات u الموجودة فى المعادلة $L(u)=0$ يمكن حسابها بالتفاضل حدًّا حدًّا للمتسلسلة فإننا نحصل وفقًا لخطية المعادلة على :

$$L(u)=L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i)=0,$$

وذلك لأنه يمكن جمع المتسلسلات المتقاربة حدًّا حدًّا . وبذلك أثبتنا أن الدالة u تحقق المعادلة . وبمثابة الشرط الكافى لإمكانية التفاضل حدًّا حدًّا للمتسلسلة سنستعين باستمرار بشرط التقارب المنتظم للمتسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \tag{31}$$

الناتجة بعد عملية التفاضل* .

* انظر كتاب بيسكونوف «التفاضل والتكامل» طبعة دار «مير» باللغة العربية .

ونعود الآن إلى مسألتنا الحدية . قبل أى شىء علينا التأكد من اتصال الدالة :

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at+B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (32)$$

ومن اتصال هذه الدالة سينتج أن $u(x, t)$ تتقارب بالاتصال إلى قيمها الابتدائية والحدية . ولهذا الغرض يكفى إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة المعبرة عن الدالة $u(x, t)$ وذلك لأن الحد العام لهذه المتسلسلة هو دالة متصلة ، والمتسلسلة المتقاربة بانتظام ــ التى حدودها دوال متصلة ــ تعرف دالة متصلة. بالاستعانة بالمتباينة :

$$|u_n(x, t)| \leqslant |A_n|+|B_n|,$$

نستنتج أن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n|+|B_n|) \quad (33)$$

تعتبر هى المتسلسلة الحد الأعظم (majorant) للمتسلسلة (32) . وإذا كانت المتسلسلة الحد الأعظم (33) تتقارب فإن المتسلسلة (32) تتقارب بانتظام أى تكون الدالة $u(x, t)$ متصلة .

وللتأكد من أن $u_t(x, t)$ تتقارب بانتظام إلى قيمها الابتدائية يجب إثبات اتصال هذه الدالة ولهذا يكفى إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l}\left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at+B_n \cos \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

أو تقارب المتسلسلة الحد الأعظم

$$\frac{a \pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n|+|B_n|). \quad (35)$$

وأخيرًا للتأكد من أن الدالة $u(x, t)$ تحقق المعادلة أى أن المبدأ المعمم للتراكب يكون قابلاً للتطبيق يكفى إثبات إمكانية إجراء عملية التفاضل مرتين للمتسلسلة المعبرة عن $u(x, t)$ حدًّا حدًّا ولهذا الغرض يكفى بدوره إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلتين :

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

اللتين تناظرهما بدقة أقصاها معامل التناسب المتسلسلة الحد الأعظم المشتركة لهما :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \tag{36}$$

وبما أن

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

حيث

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx,$$

فإن مسألتنا تؤول إلى إثبات تقارب المتسلسلات

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k = 0, 1, 2), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ولهذا الغرض نستعين بالخواص المعروفة لمتسلسلات فوربيه .

إذا كانت للدالة الدورية $F(x)$ بفترة دورة $2l$ مشتقات متصلة عددها k والمشتقة الـ $(k+1)$ لها متقطعة الاتصال فإن المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \tag{38}$$

حيث a_n و b_n معاملات فوربيه ، تكون متسلسلة متقاربة . وإذا كنا نتحدث عن التحليل فى متسلسلة للدالة $f(x)$ بـ $\sin\frac{\pi n}{l}x$ حيث الدالة $f(x)$ معطاة فقط فى الفترة $(0, l)$ فإنه يجب أن تكون المطالب السابقة متحققة للدالة $F(x)$ الناتجة بالاستكمال الفردى للدالة $f(x)$. وبوجه خاص فلاتصال الدالة $F(x)$ يجب أن

يكون $f(0)=0$ وإلا فإنه ينتج بالاستكمال الفردى انفصال عند النقطة $x=0$. وبالمثل فى النقطة $x=l$ يجب أن تكون $f(l)=0$ لأن الدالة المستكملة متصلة ودورية بفترة دورة $2l$. وينتج اتصال المشتقة الأولى عند $x=0, x=l$ مباشرة عند الاستكمال الفردى . وبوجه عام فلاتصال المشتقات من رتب زوجية للدالة المستكملة يجب أن تتحقق المطالب

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \quad (k=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n). \tag{39}$$

ويتحقق اتصال المشتقات من رتب فردية بدون أية مطالب إضافية .

وهكذا فلتقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k=0,\ 1,\ 2)$$

يكفى أن نطلب أن يحقق الانحراف الأبتدائى $\varphi(x)$ المطالب (الشروط) التالية :

١ ـ مشتقات الدالة $\varphi(x)$ حتى الرتبة الثانية بما فى ذلك المشتقة من الرتبة الثانية نفسها تكون متصلة والمشتقة الثالثة متقطعة الاتصال ، وعلاوة على ذلك

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0; \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \tag{40}$$

ولتقارب المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1,\ 0,\ 1)$$

يجب أن نشترط تحقق المطالب التالية للسرعة الابتدائية $\psi(x)$:

٢ ـ الدالة $\psi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل ولها مشتقة ثانية متقطعة الاتصال ، وعلاوة على ذلك

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \tag{41}$$

وبذلك فقد أثبتنا أن أية ذبذبة $u(x, t)$ بالدالتين الابتدائيتين $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ اللتين تحققان الشروط (١) و (٢) يمكن التعبير عنها فى صورة تراكب من الموجات المستقرة . والشروط (١) و (٢) تعتبر شروطاً كافية ترتبط بطريقة الإثبات المطبقة هنا .

وقد حلت مسألة مماثلة فى فقرة ٥ بند ٢ بطريقة الموجات المنتشرة :

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha, \qquad (42)$$

حيث Ψ , Φ يعتبران استكمالين فرديين بالنسبة إلى l , 0 للدالتين الابتدائيتين $\psi(x)$, $\varphi(x)$المعطاتين فى الفترة $(0, l)$. والدالتان Ψ , Φ كما أوضحنا دوريتان بفترة دورة $2l$ ولذا يمكن التعبير عنهما بالمتسلسلتين

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

حيث ψ_n , φ_n معاملات فورييه للدالتين $\psi(x)$, $\varphi(x)$. وبالتعويض بهاتين المتسلسلتين فى العلاقة (42) والاستعانة بنظرية جيب وجيب تمام مجموع زاويتين والفرق بين زاويتين نحصل على الصيغة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \qquad (43)$$

التى تنطبق بالصيغة الناتجة بطريقة فصل المتغيرات .

وبالتالى فالعلاقة (43) تتحقق عند كل الافتراضات الخاصة بالعلاقة (42) (انظر فقرة ١ ، بند ٣) التى نتجت بشرط أن تكون الدالة $\Phi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل مرتين والدالة $\Psi(x)$ متصلة وقابلة للتفاضل مرة واحدة .

وبالانتقال إلى الدالتين $\psi(x)$, $\varphi(x)$ يجب أن نطلب علاوة على شروط القابلية للتفاضل تحقق الشروط التالية أيضًا :

$$\begin{gathered} \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \qquad \psi(0) = \psi(l) = 0, \\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \end{gathered} \qquad (44)$$

وهكذا فالشروط (١) و (٢) التى تعتبر شروطًا كافية لتبرير أساس طريقة فصل المتغيرات تعتمد على طريقة الإثبات وتحتوى على شروط إضافية بالمقارنة مع الشروط التى تكفل وجود الحل .

وعند تبرير إمكانية التعبير عن الحل كنتيجة لتراكب الموجات المستقرة أوردنا الطريقة الأولى لإثبات تقارب المتسلسلات لأنها لا ترتبط بالصورة الخاصة (42) القابلة للتطبيق فقط على المعادلة المبسطة للذبذبات ولأن هذه الطريقة يمكن تعميمها بلا صعوبة على سلسلة من المسائل الأخرى رغم أنها تشترط مطالب أكثر على الدوال الابتدائية .

فقرة ٤ : المعادلات غير المتجانسة . ندرس المعادلة غير المتجانسة للذبذبات

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \qquad (45)$$

بالشروط الابتدائية

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,\ 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{46}$$

والشروط الحدية المتجانسة

$$\left.\begin{aligned} u(0,\ t) &= 0, \\ u(l,\ t) &= 0, \end{aligned}\right\} t > 0. \tag{47}$$

نبحث عن حل المسألة فى صورة تحليل فى متسلسلة فوريه بـ x

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{48}$$

باعتبار t عند ذلك كبارامتر. ولتعيين $u(x, t)$ ينبغى تعيين الدالة $u_n(t)$. نعبر عن الدالة $f(x,\ t)$ والشروط الابتدائية فى صورة متسلسلات فوريه :

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,\ t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

بالتعويض عن الصورة المفترضة للحل (48) فى المعادلة الأصلية (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

نرى أنها ستتحقق إذا كانت كل معاملات التحليل مساوية للصفر أى إذا كان

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \tag{50}$$

ولتعيين $u_n(t)$ حصلنا على معادلة تفاضلية عادية بمعاملات ثابتة. وتعطى الشروط الابتدائية :

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$u_t(x,\ 0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{u}_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

ومن هنا ينتج أن

$$\left.\begin{aligned} u_n(0)&=\varphi_n,\\ \dot{u}_n(0)&=\psi_n.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

وهذان الشرطان الإضافيان يحددان تماماً حل المعادلة (50) . والدالة $u_n(t)$ يمكن التعبير عنها فى الصورة

$$u_n(t)=u_n^{(\mathrm{I})}(t)+u_n^{(\mathrm{II})}(t),$$

حيث

$$u_n^{(\mathrm{I})}(t)=\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\cdot f_n(\tau)\,d\tau \tag{52}$$

هى حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية* و

$$u_n^{(\mathrm{II})}(t)=\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi n a}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at \tag{53}$$

هى المعادلة المتجانسة بالشروط الابتدائية المعطاة . وبذلك يكتب الحل المطلوب فى الصورة :

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi n a}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{54}$$

والمجموع الثانى هو عبارة عن حل مسألة الذبذبات الحرة للوتر بالشروط الابتدائية المعطاة وقد سبق بحثها بتفصيل كاف . وننتقل إلى دراسة المجموع الأول الذى يمثل الذبذبات القسرية للوتر تحت تأثير القوة الخارجية بشروط ابتدائية صفرية .

* يمكن التأكد من ذلك مباشرة . والعلاقة (52) يمكن الحصول عليها بطريقة تغاير الثوابت . انظر كذلك نهاية هذه الفقرة .

وبالاستعانة بالصيغة (49) للدوال $f_n(t)$ نحصل على :

$$u^{(I)}(x, t)=$$
$$=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau=$$
$$=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\,f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (55)$$

حيث

$$G(x, \xi, t-\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi. \qquad (56)$$

نوضح المعنى الفيزيائى للحل الناتج . نفرض أن الدالة $f(\xi, \tau)$ مختلفة عن الصفر فى جوار صغير صغرًا كافيًا للنقطة $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_0+\Delta\xi, \qquad \tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_0+\Delta\tau.$$

والدالة $\rho f(\xi, \tau)$ هى عبارة عن كثافة القوة المؤثرة ، والقوة المؤثرة على الجزء $(\xi_0, \xi_0+\Delta\xi)$ تساوى

$$F(\tau)=\rho\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\,d\xi,$$

علمًا بأن

$$I=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} F(\tau)\,d\tau=\rho\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau$$

هو دفع هذه القوة خلال الفترة الزمنية $\Delta\tau$. وإذا طبقنا نظرية القيمة المتوسطة على الصيغة :

$$u(x, t)=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\,f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau=$$
$$=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau)\,f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau,$$

سنحصل على :

$$u(x, t)=G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau})\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (57)$$

حيث $\xi_0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leqslant \bar{\tau} \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$

وبالانتقال فى العلاقة (57) إلى النهاية عند $\Delta\xi \to 0$ ، $\Delta\tau \to 0$ نحصل على الدالة

$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t - \tau_0)\frac{I}{\rho}, \tag{58}$$

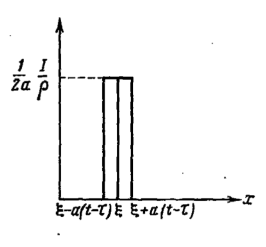
التى يمكن تفسيرها على أنها تأثير الدفع اللحظى المركز ذى القدرة I .

وإذا علمت الدالة $\frac{I}{\rho} G(x, \xi, t-\tau)$ المعبرة عن تأثير وحدة الدفع المركز فإنه يتضح مباشرة أن تأثير القوة $f(x, t)$ الموزعة توزيعًا منتظمًا يجب أن يمثل بالعلاقة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{59}$$

التى تنطبق على العلاقة (55) الناتجة أعلاه .

ودالة تأثير الدفع المركز للمستقيم اللانهائى درست فى البند السابق . ونذكر القارئ بأنها تكون دالة متقطعة الثبات مساوية $\frac{1}{2a}\frac{I}{\rho}$ داخل الزاوية المميزة العليا للنقطة (ξ, τ) وصفرًا خارج هذه الزاوية . ودالة تأثير الدفع المركز للوتر المثبت $(0, l)$ يمكن أن تنتج من دالة التأثير للوتر اللانهائى بواسطة الاستكمال الفردى بالنسبة إلى النقطتين $x = l$ ، $x = 0$.



شكل ٢٣

ندرس لحظة زمنية t قريبة قربًا كافيًا من τ حينما لا يكون قد حدث بعد تأثير الانعكاس عن الطرفين $x = l$, $x = 0$. ولهذه اللحظة تمثل دالة التأثير بالرسم المبين فى شكل ٢٣ . نحلل هذه الدالة (بفرض $I = \rho$) فى متسلسلة فورييه بـ $\sin\frac{\pi n}{l}x$. وتكون معاملات فورييه مساوية :

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l G(\alpha, \xi, t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\alpha\, d\alpha = \frac{1}{al}\int_{\xi-a(t-\tau)}^{\xi+a(t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l}\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{a\pi n} \left\{ \cos \frac{\pi n}{l} [\xi - a(t-\tau)] - \cos \frac{\pi n}{l} [\xi + a(t-\tau)] \right\} =$$
$$= \frac{2}{a\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau).$$

ومن هنا نحصل على العلاقة

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi, \qquad (60)$$

التى تنطبق على العلاقة (56) التى حصلنا عليها بطريقة فصل المتغيرات .

ولقيم t التى عندها يبدأ تأثير الطرفين المثبتين فى الحدوث يكون تكوين دالة التأثير بواسطة المميزات عملية مطولة ، أما التعبير عن هذه الدالة فى صورة متسلسلة فوريه فيحتفظ بصحته فى هذه الحالة أيضاً .

وسنكتفى هنا بالتكوين الشكلى (الصورى) للحل دون توضيح لشروط قابلية العلاقة الناتجة للتطبيق .

ندرس المعادلة الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة

$$L(u) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u^{(1)} + p_n u = f(t) \qquad (1^*)$$
$$\left(u^{(l)} = \frac{d^l u}{dt^l} \right)$$

بالشروط الابتدائية

$$u^{(l)}(0) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (2^*)$$

ويعطى حلها بالعلاقة

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) \, d\tau, \qquad (3^*)$$

حيث $U(t)$ حل المعادلة المتجانسة

$$L(U) = 0$$

بالشروط الابتدائية

$$U^{(l)}(0) = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, n-2), \quad U^{(n-1)}(0) = 1. \qquad (4^*)$$

بالفعل - بحساب مشتقات $u(t)$ بتفاضل الأطراف اليمنى بالنسبة إلى t نجد أن

$$
\left.\begin{aligned}
u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U(0) f(t) && [U(0)=0],\\
u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(1)}(0) f(t) && [U^{(1)}(0)=0],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t) && [U^{(n-2)}(0)=0],\\
u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) && [U^{(n-1)}(0)=1].
\end{aligned}\right\} \quad (5^*)
$$

بالتعويض بهذه المشتقات فى المعادلة (1*) نحصل على :

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau)\, d\tau + f(t) = f(t),$$

أى أن المعادلة تتحقق . ومن الواضح أن الشروط الابتدائية (2*) تحقق أيضًا .

وليس من الصعب إعطاء تفسير فيزيائى واضح للدالة $U(t)$ وللعلاقة (3*) . عادلة تعبر الدالة $u(t)$ عن إزاحة مجموعة ما - و $f(t)$ عن القوة المؤثرة على هذه المجموعة . نفرض أنه لـ $t < 0$ كانت مجموعتنا فى حالة السكون وتنتج إزاحتها بالدالة $f_\varepsilon(t)$ (≥ 0) التى تختلف عن الصفر فقط فى الفترة الزمنية $0 < t < \varepsilon$. ونرمز لدفع هذه القوة بالرمز

$$I = \int_0^t f_\varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

ونرمز بالرمز $u_\varepsilon(t)$ للدالة المناظرة للدالة $f_\varepsilon(t)$ معتبرين ε بارامترًا مع فرض $I = 1$. وليس من الصعب التأكد من أنه عندما $\varepsilon \to 0$ نوجد $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t)$ دون اعتماد على طريقة اختيار $f_\varepsilon(t)$ ومن أن هذه النهاية تساوى الدالة $U(t)$ للمعرفة أعلاه

$$U(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t),$$

وذلك إذا وضعنا $U(t) = 0$ لحالة $t < 0$. وبذلك فإن الدالة $U(t)$ من الطبيعى أن تسمى بدالة تأثير الدفع اللحظى .

بالفعل - فبدراسة العلاقة (3*) وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة نحصل على :

$$u_\varepsilon(t) = U(t-\tau_\varepsilon^*) \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\tau)\, d\tau = U(t-\tau_\varepsilon^*) \qquad (0 \leq \tau_\varepsilon^* < \varepsilon < t).$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نرى أنه توجد النهاية

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} U\left(t - \tau_\varepsilon^*\right) = U(t),$$

مما يثبت منطوقنا .

وننتقل الآن إلى تمثيل حل المعادلة غير المتجانسة بواسطة $U(t)$ دالة تأثير الدفع اللحظى . بتقسيم الفترة $(0, t)$ بالنقط τ_i إلى أجزاء متساوية

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

نعبر عن الدالة $f(t)$ فى الصورة

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

حيث

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & (t < \tau_i \text{ و } t \geqslant \tau_{i+1} \text{ عند}) \\ f(t) & (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \quad \text{عند}) \end{cases}$$

عندئذ نحصل على الدالة

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),$$

حيث $u_i(t)$ هى حلول المعادلة $L(u_i) = f_i$ بمعطيات ابتدائية صفرية .

وإذا كان m كبيرًا بقدر كاف فإن الدالة $u_i(t)$ يمكن اعتبارها دالة تأثير الدفع اللحظى الذى شدته :

$$I = f_i(\tau_i)\,\Delta\tau = f(\tau_i)\,\Delta\tau,$$

ومن ثم فإن

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} U(t - \tau_i) f(\tau_i)\,\Delta\tau \xrightarrow[\Delta\tau \to 0]{} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau)\,d\tau,$$

أى إننا نتوصل إلى العلاقة

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau)\,d\tau,$$

التى تبين أن تأثير القوة المؤثرة باتصال يمكن التعبير عنه بتراكب تأثيرات الدفوع اللحظية .

وفى الحالة المدروسة أعلاه تحقق $u_n^{(1)}$ المعادلة (50) والشروط $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. ولدالة التأثير $U(t)$ نحصل على :

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = 1.$$

ومن ثم فإن

$$U(t)=\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}at.$$

ومن هنا ومن (3*) نحصل على العلاقة (52)

$$u_n^{(1)}(t)=\int_0^t U(t-\tau)f_n(\tau)\,d\tau=\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)f_n(\tau)\,d\tau.$$

والتعبير التكاملي (3*) الناتج أعلاه لحل المعادلة التفاضلية العادية (1*) يحمل كما تأكدنا نفس المعنى الفيزيائي كالعلاقة (59) التي تعطي التعبير التكاملي لحل المعادلة غير المتجانسة للذبذبات.

فقرة ٥ : المسألة العامة الحدية الأولى . ندرس المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة الذبذبات :

عين حل المعادلة

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x<l,\ t>0 \tag{45}$$

بالشروط الإضافية

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=\varphi(x),\\ u_t(x,0)&=\psi(x),\end{aligned}\right\}\quad 0\leqslant x\leqslant l; \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned}u(0,t)&=\mu_1(t),\\ u(l,t)&=\mu_2(t),\end{aligned}\right\}t\geqslant 0. \tag{47}$$

ندرج دالة مجهولة جديدة $v(x,t)$ بفرض أن :

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t),$$

وبذلك فالدالة $v(x,t)$ هي عبارة عن انحراف الدالة $u(x,t)$ عن دالة ما معلومة $U(x,t)$.

وهذه الدالة $v(x,t)$ ستتحدد كحل للمعادلة

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar f(x,t),\quad \bar f(x,t)=f(x,t)-[U_{tt}-a^2U_{xx}]$$

بالشروط الإضافية

$$v(x,0)=\bar\varphi(x),\quad \bar\varphi(x)=\varphi(x)-U(x,0),$$
$$v_t(x,0)=\bar\psi(x);\quad \bar\psi(x)=\psi(x)-U_t(x,0);$$

$$v(0,t)=\bar{\mu}_1(t),\quad \bar{\mu}_1(t)=\mu_1(t)-U(0,t),$$
$$v(l,t)=\bar{\mu}_2(t);\quad \bar{\mu}_2(t)=\mu_2(t)-U(l,t).$$

نختار الدالة المساعدة $U(x, t)$ بحيث يكون

$$\bar{\mu}_1(t)=0\ ,\ \ \bar{\mu}_2(t)=0;$$

ولهذا الغرض يكفى أن نضع

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

وبذلك فالمسألة العامة الحدية الأولى للدالة $u(x, t)$ قد آلت إلى المسألة الحدية للدالة $v(x, t)$ بشروط حدية صفرية . وطريقة حل هذه المسألة عرضناها فيما سبق (انظر فقرة ٤) .

فقرة ٦ : المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنيًّا . إن المسائل الحدية ذات عدم التجانسات المستقرة زمنيًّا أى عندما لا تعتمد الشروط الحدية والطرف الأيمن للمعادلة على الزمن تعتبر فئة هامة للغاية من المسائل :

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f_0(x), \tag{45'}$$

$$\left.\begin{aligned}u(x,0)&=\varphi(x),\\ u_t(x,0)&=\psi(x),\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned}u(0,t)&=u_1,\quad u_1=\text{const},\\ u(l,t)&=u_2,\quad u_2=\text{const}.\end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

وفى هذه الحالة من الطبيعى البحث عن الحل فى صورة المجموع

$$u(x,t)=\bar{u}(x)+v(x,t),$$

حيث $\bar{u}(x)$ الحالة المستقرة (الانحناء الاستاتيكى) للوتر المعرفة بالشروط

$$a^2\bar{u}''(x)+f_0(x)=0,$$
$$\bar{u}(0)=u_1,$$
$$\bar{u}(l)=u_2,$$

و $v(x, t)$ الانحراف عن الحالة المستقرة . ولا يصعب ملاحظة أن الدالة $\bar{u}(x)$ تكون مساوية

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

وكحالة خاصة إذا كان $f_0 = \text{const}$ فإن

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

ومن الواضح أن الدالة $v(x, t)$ تحقق المعادلة المتجانسة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

بالشروط الحدية المتجانسة

$$v(0, t) = 0,$$
$$v(l, t) = 0$$

والشروط الابتدائية

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$
$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

وبذلك فإن v هى حل المسألة الحدية المبسطة التى سبق لنا دراستها فى فقرة ١ من هذا البند.

عند استنباطنا لمعادلة ذبذبات الوتر وفى حالات أخرى كثيرة لم نأخذ فى اعتبارنا تأثير قوة الجاذبية. ومما سبق ذكره ينتج أنه بدلاً من الأخذ فى الاعتبار صراحة قوة الجاذبية (وبوجه عام القوى التى لا تعتمد على الزمن) يكفى أن نأخذ فى الاعتبار الانحراف عن الحالة المستقرة زمنيًا.

نحل مسألة مبسطة من هذا النمط بشروط ابتدائية صفرية :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45''}$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{46'}$$
$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \tag{47''}$$

وفى هذه الحالة نحصل للدالة $v(x, t)$ على المسألة

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$
$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$
$$v(0, t) = 0, \; v(l, t) = 0.$$

ولا يصعب التأكد من أنه لحل هذه المسألة لا توجد ضرورة للاستعانة بالصيغة التحليلية الدقيقة للدالة $\bar{u}(x)$.

وصيغة $v(x, t)$ وفقًا للعلاقة (17) تكون على الصورة :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t)\, X_n(x),$$

حيث

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x \quad \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\right)$$

هى الدالة الذاتية للمسألة الحدية التالية :

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{10}$$

ومن الشروط الابتدائية ينتج أن

$$B_n = 0$$

و

$$A_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \bar{u}(x)\, X_n(x)\, dx.$$

ولحساب مثل هذا التكامل تعتبر الطريقة التالية سهلة للغاية :

بالاستعانة بالمعادلة (8) نجد أن :

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

نعوض بهذه الصيغة فى العلاقة الخاصة بـ A_n ونجرى التكامل المكرر مرتين بالتجزئة فنحصل على

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l \bar{u}(x)\, X_n''(x)\, dx = \frac{2}{l\lambda_n}\left\{\bar{u}X_n'(x)\Big|_0^l - \bar{u}'X_n\Big|_0^l + \int_0^l \bar{u}''X_n(x)\, dx\right\},$$

ومن هنا وبالأخذ فى الاعتبار المعادلة والشروط الحدية للدالة $\bar{u}(x)$ نجد أن :

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\left[u_2 X_n'(l) - u_1 X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\, dx\right]$$

أو

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[u_2(-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\, dx\right].$$

وكحالة خاصة نحصل للمعادلة المتجانسة $(f_0(x) = 0)$ على :

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[u_2(-1)^n - u_1\right].$$

وهذه الطريقة تكون مناسبة لحساب معاملات فورييه للشروط الحدية من النوع الثانى والثالث وكذلك فى حالة المسألة الحدية للوتر غير المتجانس

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] + \lambda\rho(x)X = 0,$$

إذا كانت الدوال الذاتية والقيم الذاتية معلومة .

فقرة ٧ : المسائل بدون الشروط الابتدائية . يمكن كما سبق أن أوضحنا أن تؤول مسألة ذبذبة الوتر بنظام حدى معطى إلى حل المعادلة غير المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية .

غير أن مثل هذه الطريقة كثيرًا ما تعقد حل المسألة الذى يمكن إيجاده مباشرة .

عند دراسة تأثير النظام الحدى من المهم تعيين حل خاص ما (للمعادلة المتجانسة) يحقق الشروط الحدية المعطاة وذلك لأن حساب الفرق الناتج من الشروط الابتدائية المعطاة (التصحيح) يؤول إلى حل نفس المعادلة بشروط حدية صفرية .

والمسائل بدون شروط ابتدائية تعتبر فئة هامة للغاية من مسائل انتشار النظام الحدى .

وإذا كان النظام الحدى يؤثر وقتًا طويلاً بقدر كاف فإنه بسبب الاحتكاك الذى تتصف به أى مجموعة فيزيائية حقيقية يضعف تأثير المعطيات الابتدائية مع مرور الزمن . وبذلك فإننا نصل بشكل طبيعى إلى المسألة بدون شروط ابتدائية (I) :

(I_a)

عين حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0),\ 0 < x < l,\ \ t > -\infty \quad (61)$$

بالشروط الحدية المعطاة :

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

وهذه المسألة نسميها المسألة (I_α) .

والحد αu_t فى الطرف الأيمن للمعادلة يناظر الاحتكاك ويتناسب مع السرعة.

ندرس أولاً مسألة انتشار النظام الحدى الدورى :

$$u(l, t) = A \cos \omega t \quad (\text{أو} \quad u(l, t) = B \sin \omega t) \tag{62}$$

$$u(0, t) = 0. \tag{63}$$

وللمستقبل من المناسب لنا أن نكتب الشرط الحدى فى الصورة المركبة (بمساعدة الدوال فى المتغير المركب) :

$$u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \tag{64}$$

وإذا كانت الدالة

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t)$$

تحقق المعادلة (61) بالشروط الحدية (63) ، (64) فإن $u^{(1)}(x, t)$ و $u^{(2)}(x, t)$ ـ وهما جزءاها الحقيقى والتخيلى ـ يحققان كل على انفراد نفس المعادلة (نظرًا لخطية المعادلة) وكذلك الشرط (63) والشروط الحدية عند $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$
$$u^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

وهكذا نعين حل المسألة

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= Ae^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

بفرض

$$u(x, t) = X(x)\, e^{i\omega t}$$

وبالتعويض بهذه الصيغة فى المعادلة نحصل للدالة $X(x)$ على المسألة التالية :

$$X'' + k^2 X = 0 \cdot \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha \frac{\omega}{a^2}\right), \tag{66}$$

$$X(0) = 0, \tag{67}$$

$$X(l) = A. \tag{68}$$

ومن المعادلة (66) والشرط الحدى (67) نعين :

$$X(x) = C \sin kx.$$

ويعطى الشرط عند $x = l$:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \tag{69}$$

ومن ثم ،

$$X(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{70}$$

حيث $X_2(x)$ ، $X_1(x)$ هما جزءا $X(x)$ الحقيقى والتخيلى .

ويمكن التعبير عن الحل المطلوب فى الصورة

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)] e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

حيث

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \sin \omega t,$$
$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \sin \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\alpha \to 0$ نجد أن

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \to 0} k = \frac{\omega}{a} \tag{71}$$

وبالتالى فإن

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \to 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \tag{72}$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \to 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \tag{73}$$

ندرس المسألة التالية :

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty; \\ &u(0, t) = \mu_1(t), \quad t > -\infty; \\ &u(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{I_0}$$

وسنسميها بالمسألة (I_0) . ومن الواضح أن $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ و $\bar{u}^{(2)}(x, t)$ يعتبران حلين للمسألة (I_0) بالشروط الحدية :

$$\bar{u}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(1)}(l, t) = A\cos\omega t,$$
$$\bar{u}^{(2)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(l, t) = A\sin\omega t.$$

وحل المسألة عند $\alpha = 0$ لا يوجد دائمًا . فإذا كان تردد الذبذبات القسرية ω منطبقًا على التردد الذاتى ω_n لذبذبات الوتر المثبت الطرفين :

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

فإن مقام علاقتى $\bar{u}^{(2)}$, $\bar{u}^{(1)}$ يؤول إلى الصفر ولا يوجد حل للمسألة بدون الشروط الابتدائية .

ولهذه الحقيقة معنى فيزيائى بسيط : فعند $\omega = \omega_n$ يحدث الرنين أى لا يوجد نظام مستقر . وتزداد السعة بلا حدود ابتداء من لحظة زمنية معينة $t = t_0$.

وعند وجود احتكاك $(\alpha \neq 0)$ يمكن وجود النظام المستقر لأى ω لأن $\sin kl \neq 0$ عندما يكون k عددًا مركبًا .

وإذا كان $\mu_1(t) = 0$ وكانت $\mu_2(t)$ دالة دورية قابلة للتمثيل فى صورة متسلسلة :

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega nt + B_n\sin\omega nt), \tag{74}$$

حيث ω أصغر تردد ، B_n , A_n معاملات فورييه ، فإن حل المسألة لحالة $\alpha = 0$ يأخذ الصورة

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l}x + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega nt + B_n\sin\omega nt)\frac{\sin\frac{\omega n}{a}x}{\sin\frac{\omega n}{a}l},$$

فقط ما لم ينطبق أحد الترددات ωn على الترددات الذاتية للوتر المثبت .

أما إذا كانت $\mu_2(t)$ دالة غير دورية فإنه بتحليلها فى تكامل فورييه بطريقة مماثلة يمكن الحصول على الحل فى صورة تكاملية .

ونشير إلى أن حل المسألة بدون الشروط الابتدائية عندما $\alpha = 0$ معرف تعريفًا غير أحادى القيمة ما لم نفترض شروطًا إضافية ما . بالفعل إذا أضفنا إلى أى حل لهذه المسألة أية تركيبة من الموجات المستقرة

$$\sum\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

حيث A_n , B_n ثوابت اختيارية ، نرى أن هذا المجموع سيحقق نفس المعادلة ونفس الشروط الحدية .

وللحصول على حل وحيد للمسألة (I_α) عندما $\alpha = 0$ نورد شرطًا إضافيًا «للاحتكاك المتلاشى» :

حل المسألة (I_0) يسمى محققًا لشرط «الاحتكاك المتلاشى» إذا كان حلاً للمسألة (I_α) عندما $\alpha \to 0$.

وبالمثل تحل المسألة إذا كان الطرف $x = l$ مثبتًا وعند $x = 0$ معطى نظام حدى .

وحل المسألة العامة بدون الشروط الابتدائية

$$u(0,\ t)=\mu_1(t),\quad u(l,\ t)=\mu_2(t)$$

يتحدد فى صورة مجموع حدين ، لكل حد منهما يكون أحد الشرطين الحديين فقط غير متجانس .

نثبت وحدانية الحل المحدود للمسألة بدون الشروط الابتدائية للمعادلة (61). وعند ذلك فسنفترض اتصال الحل هو ومشتقاته حتى الرتبة الثانية بما فى ذلك مشتقات الرتبة الثانية نفسها . فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant l, -\infty < t < t_0$ إذا كانت القيم الحدية

$$u(0,\ t)=\mu_1(t),\quad u(l,\ t)=\mu_2(t)$$

معرفة فى المنطقة $-\infty < t < t_0$.

نفرض أن $u_1(x,t), u_2(x,t)$ حلان محدودان للمسألة المدروسة (I) .

$$|u_1|<M,\quad |u_2|<M,$$

حيث $M > 0$ عدد ما .

والفرق بين هاتين الدالتين

$$v(x,\ t)=u_1(x,\ t)-u_2(x,\ t)$$

محدود ($|v| < 2M$) ويحقق المعادلة (61) والشروط الحدية المتجانسة

$$v(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)=0.$$

ومعاملات فوريه للدالة v :

$$v_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l v(x, t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

من الواضح أنها تحقق المعادلة :

$$\ddot{v}_n + \alpha\dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l}a\right), \qquad (*)$$

وذلك لأن المشتقات الثانية للدالة $v(x, t)$ متصلة فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant l$.

والحل العام للمعادلة (٭) يكون على الصورة :

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)}t} + B_n e^{q_n^{(2)}t} \qquad (**)$$

حيث $q_n^{(2)}$ ، $q_n^{(1)}$ جذرا المعادلة المميزة ويساويان

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

وحيث أن $\alpha > 0$ فإن $\mathrm{Re}\, q_n^{(1,2)} < 0$ وبالتالى فإن الحل (٭٭) للمعادلة (٭) يكون محدودا عندما $t \to -\infty$ فقط عندما $A_n = 0$ ، $B_n = 0$ أى أن $v_n(t) \equiv 0$ لأى n .

وبذلك فإن

$$v(x, t) \equiv 0 \quad , \quad u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

فقرة ٨ : القوة المركزة . ندرس مسألة ذبذبات الوتر تحت تأثير قوة مركزة مؤثرة فى النقطة $x = x_0$. وإذا كانت القوة موزعة على جزء ما $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ فإن الحل يعين بالعلاقة (55) . وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ يمكن الحصول على حل المسألة المطروحة .

ومن ناحية أخرى فقد رأينا عند استنباط معادلة الذبذبات (انظر (8) ، فقرة ١ ، بند ١) أنه فى النقطة x_0 حيث تؤثر القوة المركزة يحدث انفصال للمشتقة الأولى وتظل الدالة نفسها متصلة . والحل $u(x, t)$ لمسألة ذبذبات الوتر تحت تأثير القوة المركزة فى النقطة x_0 يمكن التعبير عنه بدالتين مختلفتين :

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) \quad \text{عند} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u(x, t) &= u_2(x, t) \quad \text{عند} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

وهاتان الدالتان يجب أن تحققا المعادلة

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \quad \text{عند} \quad x\neq x_0 \tag{76}$$

والشروط الحدية الابتدائية

$$\left.\begin{array}{ll} u_1(0,\ t)=0, & u(x,\ 0)=\varphi(x), \\ u_2(l,\ t)=0; & u_t(x,\ 0)=\psi(x) \end{array}\right\} \tag{77}$$

وشروط الترافق عند النقطة $x=x_0$ (انظر (8) ، بند ١) المتكونة من شرط اتصال الدالة $u(x,\ t)$:

$$u_1(x_0,\ t)=u_2(x_0,\ t), \tag{78}$$

ومن الشرط الذى يربط بين مقدار انفصال المشتقة وبين القوة $f(t)$ المركزة فى النقطة x_0 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0-0}^{x_0+0}=\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0,\ t)-\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0,\ t)=-\frac{f(t)}{k}. \tag{79}$$

ولا توجد ضرورة للاهتمام بتحقق الشروط الابتدائية . فإذا وجدنا حلاً خاصًا للمعادلة (76) يحقق الشروط الحدية من (77) وكذلك (78) و (79) فإننا بإضافة حل المعادلة المتجانسة للذبذبات إليه نستطيع دائمًا تحقيق الشروط الابتدائية المعطاة .

ندرس حالة خاصة

$$f(t)=A\cos\omega t, \quad -\infty<t<+\infty$$

ونعين الحل الذى يحقق فقط الشروط الحدية بافتراض أن الدالة تؤثر طول الوقت ابتداء من $t=-\infty$ (نظام مستقر) أى نحل المسألة بدون الشروط الابتدائية . نبحث عن الحل فى الصورة

$$u_1(x,\ t)=X_1(x)\cos\omega t \quad \text{عندما} \quad 0\leqslant x\leqslant x_0 .$$
$$u_2(x,\ t)=X_2(x)\cos\omega t \quad \text{عندما} \quad x_0\leqslant x\leqslant l .$$

ومن المعادلة (76) ينتج :

$$\left.\begin{array}{ll} X_1''+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2X_1=0 \quad \text{عندما} \quad 0\leqslant x\leqslant x_0 . \\ X_2''+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2X_2=0 \quad \text{عندما} \quad x_0\leqslant x\leqslant l . \end{array}\right\} \tag{80}$$

والدالتان X_2 , X_1 علاوة على ذلك يجب أن تحققا الشرطين الحديين

$$X_1(0)=0, \quad X_2(l)=0, \tag{81}$$

الناتجين من (77) وكذلك يجب أن تحققا شرطى الترافق

$$X_1(x_0)=X_2(x_0), \quad X_1'(x_0)-X_2'(x_0)=\frac{A}{k}, \tag{82}$$

الناتجين من (79) ، (78) .

ومن المعادلة (80) والشرطين (81) نحصل على :

$$X_1(x)=C\sin\frac{\omega}{a}x, \quad X_2(x)=D\sin\frac{\omega}{a}(l-x);$$

وشرطا الترافق (82) يعطيان

$$C\sin\frac{\omega}{a}x_0-D\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0)=0,$$
$$C\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}x_0+D\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(l-x_0)=\frac{A}{k}.$$

وبتعيين المعاملين D , C من هذه العلاقات نجد أن :

$$u(x,t)=\begin{cases} u_1=\dfrac{Aa}{k\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0)}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}x\cos\omega t & (\text{عند } 0\leqslant x\leqslant x_0) \\ u_2=\dfrac{Aa}{k\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega}{a}x_0}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x)\cos\omega t & (\text{عند } x_0\leqslant x\leqslant l) \end{cases}$$

وبالمثل يكتب الحل عندما $f(t)=A\sin\omega t$.

وهكذا حصلنا على الحل لحالة $f(t)=A\cos\omega t$ أو $f(t)=A\sin\omega t$.

وإذا كانت الدالة $f(t)$ دورية وتساوى

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos\omega nt+\beta_n\sin\omega nt)$$

(ω أصغر تردد) فمن الواضح أن :

$$
u(x,t)=\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x}{2}\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\sin\frac{\omega n}{a}(l-x_0)}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\dfrac{\omega n x}{a}\times\right. \\ \qquad\left.\times(\alpha_n\cos\omega nt+\beta_n\sin\omega nt),\quad 0\leqslant x\leqslant x_0;\right. \\ u_2=\dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x_0}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\sin\frac{\omega n}{a}x_0}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\dfrac{\omega n(l-x)}{a}\times\right. \\ \times(\alpha_n\cos\omega nt+\beta_n\sin\omega nt),\quad x_0\leqslant x\leqslant l. \end{cases} \quad (83)^*
$$

وإذا كانت الدالة $f(t)$ غير دورية فإنه بالتعبير عنها فى صورة تكامل فورييه يمكن بطريقة مماثلة الحصول على الحل فى صورة تكاملية .

وإذا كان مقام الدالتين (83) يساوى الصفر

$$\sin\frac{\omega nl}{a}=0,$$

$$\omega n=\frac{\pi m}{l}a=\omega_m,$$

أى إذا كانت فئة ترددات القوة الاضطرابية المؤثرة تحتوى على أحد الترددات الذاتية للذبذبات (الرنين) فإن النظام المستقر لن يوجد .

وإذا كانت نقطة تأثير القوة x_0 إحدى عقد الموجة المستقرة المناظرة للذبذبة الحرة بالتردد ω_m فإن

$$\sin\frac{\omega_m}{a}x_0=0,$$

$$\sin\frac{\omega_m}{a}(l-x_0)=0.$$

وعند ذلك فإن البسط فى الحدود المناظرة فى الدالة u يؤول إلى الصفر ولا تنشأ

* الحدان الأولان فى هذين المجموعين يناظران الانحناء المستقر (الاستاتيكى) المعرف وفقا لمقدار القوة $f(t)=\alpha_0/2=\text{const}$ كما يسهل ملاحظة ذلك بالدالتين :

$$
u=\begin{cases} u_1(x,t)=u_1(x)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right) & (\text{عند } 0\leqslant x\leqslant x_0) \\ u_2(x,t)=u_2(x)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & (\text{عند } x_0\leqslant x\leqslant l) \end{cases}
$$

ظاهرة الرنين . أما إذا كانت نقطة تأثير القوة المؤثرة بتردد ω_m هى بطن الموجة المستقرة المناظرة بالتردد ω_m فإن

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 1,$$

وتنشأ ظاهرة الرنين بأكثر حدة ممكنة .

ومن هنا تنتج قاعدة هى إنه لإحداث الرنين فى الوتر عند التأثير عليه بقوة مركزة يجب أن يكون تردد القوة ω مساويًا لأحد الترددات الذاتية للوتر وأن تنطبق نقطة تأثير القوة على إحدى بطون الموجة المستقرة .

فقرة ٩ : الشكل العام لطريقة فصل المتغيرات . إن طريقة فصل المتغيرات قابلة للتطبيق ليس فقط على معادلة ذبذبات الوتر المتجانس وإنما أيضًا على معادلة ذبذبات الوتر غير المتجانس . لندرس المسألة التالية :

عين حل المعادلة

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)\,u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \quad (84)$$

الذى يحقق الشروط

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \qquad (85)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \qquad (86)$$

وهنا ρ , q , k دوال متصلة فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant l$ وموجبة ($k > 0$ ، $q \geqslant 0$ ، $\rho > 0$)* . نجرى حل هذه المسألة بطريقة فصل المتغيرات . وللبحث عن الحلول الخاصة نلجأ ، كما سبق ، إلى المسألة المساعدة عن وجود الموجات المستقرة :

عين الحل غير التافه للمعادلة (84) الذى يحقق الشروط الحدية

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

* تدرس تلك الحالة عندما يؤول $k(x)$ إلى الصفر فى بعض النقط دراسة منفصلة (انظر الملحق ٢) .

ويقبل التمثيل فى صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

بالتعويض بالصيغة المفترضة للحل فى المعادلة والاستعانة بالشروط الحدية ، نحصل بعد فصل المتغيرات على :

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] - qX + \lambda\rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

ولتعيين الدالة $X(x)$ نحصل على المسألة الحدية التالية للقيم الذاتية* :

عين تلك القيم للبارامتر λ التى يوجد عندها حلول غير تافهة للمسألة :

$$L(X) + \lambda\rho X = 0, \qquad (87)$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \qquad (88)$$

وكذلك عين هذه الحلول . وتسمى قيم البارامتر λ هذه بالقيم الذاتية وتسمى الحلول غير التافهة المناظرة لها بالدوال الذاتية للمسألة (88)—(87) . نصيغ الخواص الأساسية للدوال الذاتية والقيم الذاتية للمسألة الحدية (87) و(88) اللازمة لشرحنا التالى .

١ ـ توجد فئة قابلة للعد (countable set) من القيم الذاتية $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$ التى تناظرها حلول غير تافهة للمسألة هى الدوال الذاتية $\dots, X_1(x), \quad X_2(x), \dots, X_n(x), \dots$.

٢ ـ عندما يكون $q \geqslant 0$ تكون كل القيم الذاتية لـ λ_n موجبة .

---

* عندما $k = k_0 = \text{const}, \ \rho = \rho_0 = \text{const}$ نحصل على المسألة الحدية للذبذبات الذاتية للوتر المثبت الطرفين :

$$X'' + \mu X = 0 \qquad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0}\lambda\right)$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0,$$

التى سبق بحثها فى بند ٢ .

٣ ـ الدوال الذاتية $X_n(x)$ ، $X_m(x)$ تكون عند $m \neq n$ متعامدة فيما بينها بالوزن $\rho(x)$ فى الفترة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n). \tag{89}$$

٤ ـ (نظرية القابلية للتحليل ـ نظرية ف. ستيكلوف) . الدالة الاختيارية $F(x)$ القابلة للتفاضل باتصال مرتين والتى تحقق الشروط الحدية $F(0) = F(l) = 0$ تحلل فى متسلسلة منتظمة ومطلقة التقارب بالدوال الذاتية $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x) X_n(x) \rho(x)\, dx, \tag{90}$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx.$$

ويبنى عادة إثبات المنطوقين ١ و ٤ على نظرية المعادلات التكاملية ولن نورده هنا . وفى هذه الفقرة سنثبت فقط الخاصيتين ٢ و ٣ .

وقبل أن ننتقل إلى إثبات هذه الخواص نستنبط علاقة تسمى علاقة جرين . نفرض أن $u(x)$ و $v(x)$ دالتان اختياريتان قابلتان للتفاضل مرتين فى الفترة $a < x < b$ ، والمشتقة الأولى لكل منهما موجودة ومتصلة فى الفترة المغلقة $a \leqslant x \leqslant b$. لندرس الصيغة

$$uL[v] - vL[u] = u(kv')' - v(ku')' = [k(uv' - vu')]'.$$

وبتكامل هذه المتساوية بالنسبة إلى x من a إلى b نحصل على علاقة جرين

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])\, dx = k(uv' - vu') \Big|_a^b . \tag{91}$$

نثبت الخاصية ٣ . نفرض أن $X_n(x)$ ، $X_m(x)$ دالتان ذاتيتان تناظران القيمتين الذاتيتين λ_n ، λ_m . بفرض $u = X_m(x),\ v = X_n(x)$ فى العلاقة (91) مع

الأخذ فى الاعتبار الشروط الحدية (88) نحصل على* :

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\} dx = 0 \qquad (a = 0, \quad b = l),$$

ومن هنا وبالاستعانة بالمعادلة (87) نحصل على :

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

وبذلك فإذا كان $\lambda_n \neq \lambda_m$ فإنه يتحقق الشرط

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \tag{92}$$

الذى يعبر عن تعامد الدالتين الذاتيتين $X_m(x)$, $X_n(x)$ بالوزن $\rho(x)$.

ونثبت الآن أن كل قيمة ذاتية يناظرها بدقة أقصاها معامل ثابت دالة ذاتية واحدة فقط** . فبالفعل كل دالة ذاتية تتحدد تحديدًا أحادى القيمة كحل للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بقيمة الدالة نفسها ومشتقتها الأولى عند $x = 0$. وبافتراض وجود دالتين $\overline{\overline{X}}$, $\overline{X}$ تناظران نفس القيمة λ وتؤولان إلى الصفر عندما $x = 0$. ثم بأخذ الدالة

$$X^*(x) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(x),$$

---

* المشتقتان X_n' ، X_m' متصلتان فى كل نقطة من الفترة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l$ بما فى ذلك النقطتان $x = 0$ و $x = l$ وذلك لأن المعادلة (87) تعطى

$$k(x) X_m'(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho) X_m dx + C.$$

ومن هنا ينتج وجود المشتقة X_m' عند $x = 0$ و $x = l$.

** إن الخاصية التى يتم اثباتها للمسألة الحدية الأولى مؤسسة على أن الحلين المستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لايمكن أن يؤولا إلى الصفر فى نفس النقطة الواحدة . وهذا المنطوق يتعلق بالمسألة الحدية بالشروط الحدية الصفرية . وبشروط حدية أخرى (على سبيل المثال $X(0) = X(l)$ ، $X'(0) = X'(l)$ يمكن أن توجد دالتان ذاتيتان مختلفتان تناظران قيمة ذاتية واحدة ($X_n^{(2)}(x) = \sin \frac{2\pi n}{l} x$, $X_n^{(1)}(x) = \cos \frac{2\pi n}{l} x$, عندما $n = 1, 2, \ldots$, $\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2$) .

نرى ان هذه الدالة تحقق نفس المعادلة من الرتبة الثانية (87) ونفس الشروط الابتدائية التى تحققها الدالة $\overline{X}(x)$:

$$X^*(0)=\frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\overline{\overline{X}}(0)=0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0)=\frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\overline{\overline{X}}'(0)=\overline{X}'(0).$$

وبذلك أثبتنا أن $X^*(x)=\overline{X}(x)$ وأن

$$\overline{X}(x)=A\overline{\overline{X}}(x)\quad\left(A=\frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\right).$$

ونشير إلى أننا خلال عملية الإثبات استخدمنا الشرط $\overline{\overline{X}}'(0)\neq 0$ الذى يتحقق حتمًا لأن حل المعادلة الخطية (87) المحدد بالشرطين الابتدائيين

$$\overline{\overline{X}}(0)=0,\quad \overline{\overline{X}}'(0)=0,$$

يساوى الصفر بالتطابق ومن ثم فلا يمكن أن يكون دالة ذاتية (انظر صفحة ١٣٤) .

ووفقًا لخطية وتجانس المعادلة والشروط الحدية من الواضح أنه إذا كانت الدالة $X_n(x)$ دالة ذاتية عند القيمة الذاتية لـ λ_n فإن الدالة $A_nX_n(x)$ (A_n ثابت اختيارى) تعتبر أيضًا دالة ذاتية لنفس λ_n . وقد أثبتنا أعلاه أن فئة الدوال الذاتية تنتهى عند ذلك تمامًا . ومن الواضح أن الدوال الذاتية التى تختلف عن بعضها بمعامل لن نعتبرها مختلفة اختلافًا جوهريًا . ولتجنب عدم التحديد فى اختيار المعامل يمكن إخضاع الدوال الذاتية لمطلب «التوحيد» (normalization)

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\rho(x)\,dx=1.$$

وإذا لم تحقق دالة ما $\hat{X}_n(x)$ هذا المطلب فإنه يمكن «توحيدها» بضربها فى المعامل A_n :

$$A_n\hat{X}_n(x)=X_n(x),\qquad A_n=\frac{1}{\|X_n\|}.$$

وإذا أخضعنا الدوال الذاتية للمسألة (88)—(87) لشرط التوحيد $(\|X_n\|=1)$ فإنها تكوّن مجموعة متعامدة متوحدة

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n.\end{cases}$$

ننتقل إلى إثبات الخاصية ٢ . نثبت أن $\lambda > 0$ عندما $q \geqslant 0$. نفرض أن $X_n(x)$ دالة ذاتية متوحدة (normed) تناظر القيمة الذاتية λ_n ومن ثم

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

بضرب طرفى هذه المتساوية فى $X_n(x)$ والتكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى l نحصل على :

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx = -\int_0^l X_n(x) L[X_n]\, dx$$

أو

$$\lambda_n = -\int_0^l X_n \frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{dX_n}{dx}\right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx,$$

وذلك لأن الدالة $X_n(x)$ يفترض أنها متوحدة . وبإجراء التكامل بالتجزئة والاستعانة بالشروط الحدية (88) نحصل على :

$$\lambda_n = -X_n k X_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx =$$
$$= \int_0^l k(x) [X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx, \qquad (93)$$

ومن هنا ينتج أن

$$\lambda_n > 0,$$

لأن لدينا من الشرط $k(x) > 0$ و $q(x) \geqslant 0$.

وبترك إثبات نظرية القابلية للتحليل جانبًا نتوقف باختصار عند حساب معاملات التحليل .

ليس من الصعب ملاحظة أن

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x)\, dx. \qquad (94)$$

بالفعل ، بضرب طرفى المتساوية

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

فى $\rho(x)X_n(x)$ وإجراء التكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى l مع الأخذ فى الاعتبار تعامد الدوال الذاتية نحصل على الصيغة المكتوبة أعلاه للمعاملات F_n (معاملات فوريه)* .

ونعود الآن إلى المعادلة التفاضلية الجزئية . للدالة $T(t)$ لدينا المعادلة

$$T'' + \lambda_n T = 0 \tag{95}$$

بدون أية شروط إضافية . ووفقًا لكون λ_n موجبة كما أثبتنا أعلاه يكون حل هذه المعادلة على الصورة :

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

حيث B_n ، A_n معاملان غير محددين . وبذلك يكون للمسألة المساعدة فئة لانهائية من الحلول على الصورة

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

وننتقل إلى حل المسألة بالشروط الابتدائية المعطاة . سنبحث عن الحل فى الصورة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \tag{96}$$

والشكل الصورى لتحقيق الشروط الابتدائية (86) يؤسس على نظرية القابلية للتحليل ٤ ويجرى تمامًا كما هو فى حالة الوتر المتجانس . ومن المتساويتين

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

نجد أن

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{97}$$

* تنتج إمكانية إجراء التكامل حدا حدا للمتسلسلة من نظرية ستيكلوف عن التقارب المنتظم للمتسلسلة (90).

حيث ψ_n ، φ_n معاملات فورييه للدالتين $\psi(x)$ ، $\varphi(x)$ عند التحليل بمجموعة الدوال المتعامدة $\{X_n(x)\}$ بالوزن $\rho(x)$.

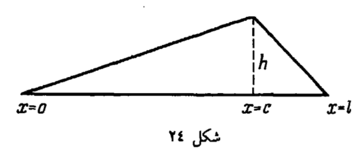
وبالاكتفاء بالشكل العام لطريقة فصل المتغيرات لن نورد شروط قابلية هذه الطريقة للتطبيق سواء المتعلقة منها بمعاملات المعادلة أو بالدوال الابتدائية .

ويعود الفضل فى تأليف الأبحاث الأساسية الأولى لتبرير هذه الطريقة إلى ف. ستيكلوف ، وقد نشرت فى عام ١٨٩٦ وفى عام ١٩٢٢ .

مسائل :

١ ـ عين الدالة $u(x, t)$ التى تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت عند طرفيه المثارة (شكل ٢٤) بشد الوتر عند النقطة $x = c$ بمقدار h أى أن $u(c, 0) = h$ (انظر الملحق ١) . والسرعة الابتدائية تساوى الصفر .

٢ ـ وتر مثبت الطرفين يشد من النقطة $x = c$ بالقوة F_0 . عين ذبذبة الوتر إذا علم أن القوة فى اللحظة الابتدائية تتوقف عن التأثير وأن السرعة الابتدائية تساوى صفرا .



شكل ٢٤

٣ ـ عين الدالة $u(x, t)$ التى تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت الطرفين المثارة بالدفع K الموزع على الجزء $(c - \delta, c + \delta)$: (أ) بانتظام ، (ب) وفقا للقانون $v_0 \cos \frac{x - c}{2\delta} \pi$ (انظر الملحق ١) إذا كان الانحراف الابتدائى يساوى صفرا .

٤ ـ عين الدالة $u(x, t)$ التى تحدد عملية ذبذبة الوتر $(0, l)$ المثبت الطرفين المثارة بالدفع K المؤثر عند النقطة $x = c$ (انظر الملحق ١) . الانحراف الابتدائى يساوى صفرا .

٥ ـ اثبت الخاصة الجمعية (additivity) لطاقة التوافقيات المنفردة لعملية الذبذبات بالشروط الحدية $u = 0, u_x = 0$. ادرس أيضا الشرط الحدى من النوع الثالث $u_x + hu = 0$ (افرض أن كل المتسلسلات منتظمة التقارب).احسب طاقة التوافقيات المنفردة فى المسائل ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .

٦ ـ زنبرك مثبت عند أحد طرفيه عند النقطة $x = 0$ يشد بثقل كتلته M معلق عند النقطة $x = l$. عين ذبذبات الزنبرك إذا كان الثقل فى اللحظة $t = 0$ يسقط ولا تؤثر بعد ذلك عند الطرف $x = l$ اية قوى على الاطلاق .

٧ ـ قضيب مثبت عند أحد طرفيه وعند الطرف الثانى تؤثر القوة F_0 . عين ذبذبات القضيب إذا علم أن القوة تتوقف عن التأثير فى اللحظة الابتدائية .

٨ ـ عين عملية ذبذبة زنبرك مثبت عند أحد طرفيه وفى الطرف الآخر علق فى اللحظة الابتدائية ثقل كتلته M . الشروط الابتدائية صفرية .

٩ ـ ثبتت كتلة M عند النقطة $x = c$ على وتر مثبت الطرفين $x = 0$ ، $x = l$. عين انحراف الوتر $u(x, t)$ إذا كان : (أ) فى اللحظة الابتدائية شد الوتر عند النقطة $x = c$ بمقدار h عن وضع الاتزان ثم ترك دون اكتساب سرعة ابتدائية ، (ب) الانحراف الابتدائى والسرعة الابتدائية يساويان الصفر (انظر الملحق ٣) .

١٠ ـ عين عملية ذبذبة زنبرك حر الطرفين إذا كان الشد الابتدائى منتظما (ضع نموذجا لهذه المسألة) .

١١ ـ عين عملية ذبذبة زنبرك مثبت الطرفين بمرونة إذا كانت معاملات الكزازة (الصلابة) واحدة والشروط الابتدائية اختيارية .

ابحث الحل عند قيم h الصغيرة (تثبيت « لين ») وعند قيم h الكبيرة (تثبيت « صلب ») واحسب الفروق المناظرة للقيم الذاتية للوتر الحر الطرفين والوتر المثبت الطرفين .

١٢ ـ عين الانحراف $u(x, t)$ للوتر المثبت الطرفين بصلابة إذا كانت الذبذبات تحدث فى وسط مقاومته تتناسب مع السرعة ، والشروط الابتدائية اختيارية .

١٣ ـ سلك كهربائى معزول طوله l بالمميزات $L, R, C, G = 0$ مشحون حتى جهد معين ثابت v_0 . وفى اللحظة الابتدائية يوصل أحد طرفى السلك بالأرض ويبقى الطرف الثانى طول الوقت معزولا . عين توزيع الجهد فى السلك .

١٤ ـ يتذبذب وتر مثبت الطرفين تحت تأثير قوة توافقية موزعة بالكثافة $f(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$. عين الانحراف $u(x, t)$ للوتر بشروط ابتدائية اختيارية . ابحث امكانية حدوث الرنين وعين الحل فى حالة الرنين .

١٥ ـ حل المسألة ١٤ بافتراض أن الذبذبة تحدث فى وسط تتناسب مقاومته مع السرعة . عين الذبذبات المستقرة المكونة للجزء الأساسى من الحل عندما $t \to \infty$.

١٦ ـ قضيب مرن طوله l وضع رأسيا وثبت بصلابة عند طرفه العلوى بمصعد يسقط سقوطا حرا وعندما تصل سرعته إلى السرعة v_0 يتوقف فورا . عين ذبذبة القضيب بافتراض أن الطرف الأسفل للقضيب يكون حرا .

١٧ ـ حل المعادلة

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

بالشروط الابتدائية الصفرية والشروط الحدية

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B$$

حيث B ، A ، b ثوابت .

١٨ ـ حل المعادلة التفاضلية

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sinh x$$

بشروط ابتدائية صفرية والشروط الحدية :

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

حيث C ، B ، A ثوابت .

١٩ ـ على الوتر المتجانس المثبت الطرفين $x = l$ ، $x = 0$ بصلابة اثرت عند النقطة $x = c$ $(0 < c < l)$ القوة التوافقية

$$F(t) = P_0 \sin \omega t,$$

التي تؤثر ابتداء من اللحظة $t = 0$. عين انحراف الوتر $u(x, t)$ بافتراض الشروط الابتدائية صفرية .

٢٠ ـ حل مسألة الذبذبات لقضيب غير متجانس طوله l مثبت الطرفين بصلابة ومكون من قضيبين متجانسين متصلين عند النقطة $x = c (0 < c < l)$ إذا كان الانحراف الابتدائي على الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x & (\text{عند } 0 \leqslant x \leqslant c) \\ \frac{h}{l - c}(l - x) & (\text{عند } c \leqslant x \leqslant l) \end{cases}$$

والسرعتان الابتدائيتان تساويان الصفر .

٢١ ـ عين الذبذبات المستقرة لزنبرك أحد طرفيه مثبت وعند الطرف الثاني تؤثر القوة

$$F(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t.$$

٢٢ ـ عين الذبذبات المستقرة لقضيب غير متجانس مكون من قضيبين متجانسين متصلين عند النقطة $x = c$ إذا كان أحد طرفي القضيب مثبتا والطرف الآخر يتحرك وفقا للقانون

$$u(l, t) = A \sin \omega t.$$

بند ٤ ـ المسائل بالمعطيات على المميزات

فقرة ١ : صياغة المسألة . ندرس عدة مسائل تعتبر تطويرًا للمسألة الحدية الأولى لمعادلة ذبذبات الوتر . وللتبسيط سندرس الظواهر الناشئة بالقرب من أحد طرفي الوتر معتبرين الطرف الآخر مبتعدًا إلى مالانهاية أى أننا نأخذ بمثابة المسألة الأصلية مسألة المستقيم نصف اللانهائي .

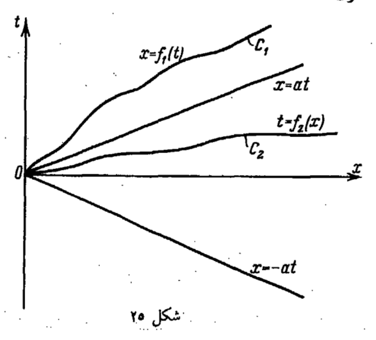
معادلة ذبذبات الوتر $u_{t't'} = a^2 u_{xx}$ متماثلة بالنسبة للمتغيرين t , x إذا وضعنا $a^2 = 1$ أى غيرنا مقياس الزمن بإدراج متغير جديد $t = at'$. إلا أن الشروط الإضافية تدخل لا تماثلاً (asymmetry) فى التفسير الرياضى للمتغيرين t , x : فى الشروط الابتدائية (عندما $t = 0$) تعطى دالتان $u(x, 0)$ ، $u_t(x, 0)$ فى حين أنه فى الشروط الحدية (عند $x = 0$) تعطى دالة واحدة فقط $u(0, t)$.

وكما سبق ذكره فى بند ٢ ، فقرة ٩ يوجد بين الدوال ومشتقاتها العمودية عند $x=0$, $t=0$ العلاقة :

$$u_t(0, z)+u_x(0, z)=u_t(z, 0)+u_x(z, 0) \quad (a^2=1)$$

لأى قيمة اختيارية z . ومن هنا ينتج أنه عند $t=0$ و $x=0$ لا يمكن إعطاء كل هذه الدوال بشكل مستقل عن بعضها البعض . فالشروط التى تعتبز اختيارية هى فقط ثلاثة شروط مما يبين عدم إمكانية التعويض المتماثل فى الشروط الإضافية .

والشروط الإضافية يمكن إعطاؤها إما على الخطوط المستقيمة $x=0$, $t=0$ (كنا نتعامل مع المسائل من هذا النوع حتى الآن) وإما على بعض المنحنيات فى المستوى الطورى . فعلى سبيل المثال يمكن إعطاء القيم الحدية على منحنى ما $C_1(x=R_1(t))$ غير أنه لكى تكون هذه المسألة قابلة للحل يجب أن يكون المنحنى C_1 فضلاً عن ملاسته بشكل كاف ، محققًا أيضًا لبعض الشروط الإضافية الأخرى .



شكل ٢٥

ندرس عملية ذبذبات غاز فى أنبوبة ذات حدود متحركة (بكباس متحرك) . من الواضح أن سرعة حركة الحدود التى تتحرك وفقًا للقانون $x=f_1(t)$ لا يمكن اعتبارها إختيارية : فهى يجب ألا تفوق سرعة الصوت a $\left(\frac{df_1(t)}{dt}<a\right)$. والنتيجة الهندسية لذلك هى أن المنحنى $C_1(x=f_1(t))$ يجب أن يكون مفصولاً

عن الخط $t = 0$ الذى يحمل القيم الابتدائية بالمميزة (شكل ٢٥) : ولو وقعت نقطة واحدة على الأقل من نقط المنحنى C_1 أسفل المميزة $x = at$ لكانت قيمة الدالة $u(x, t)$ ستتحدد تمامًا بالشروط الابتدائية ولما كان يمكن إعطاء هذه القيمة بشكل اختيارى . ويرتبط المعنى الفيزيائى لذلك بأنه عند حركة الغاز بسرعات تفوق سرعة الصوت تفقد معادلة الصوتيات معناها وصحتها وينبغى عندئذ استخدام المعادلات اللاخطية لديناميكا الغازات* .

والشروط الابتدائية يمكن إعطاؤها ليس فقط على المحور $t = 0$ وإنما أيضًا على منحنى ما C_2 $(t = f_2(x))$ الذى يجب أن يحقق الشرط $|f_2'(x)| < 1/a$ (عند ذلك تقع C_2 فى مجال تأثير المعطيات الابتدائية) . والمسائل على هذا النمط يسهل حلها بواسطة المعادلة التكاملية للذبذبات (انظر بند ٢ ، فقرة ٩) .

وحيث إننا لا نهدف إعطاء قائمة كاملة لجميع المسائل الحدية الممكنة فسندرس بالتفصيل مسألة تعيين الحل بالمعطيات على المميزات . وهذه المسألة الحدية تسمى عادة بمسألة جورس . وتشكل المسألة بالمعطيات على المميزات أهمية كبيرة من وجهة نظر التطبيقات الفيزيائية . فهى تصادفنا مثلاً عند دراسة عمليات انتشاف (sorption) ومج (desorption) الغازات (انظر ملحق ٥) وعمليات التجفيف (انظر المسألة ١) وكثير من المسائل الأخرى .

فقرة ٢ : طريقة التقريبات المتتالية لمسألة جورس . ندرس المسألة المبسطة التالية بالمعطيات على المميزات :

$$\left.\begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

والشروط الإضافية معطاة على المستقيمين $x = 0$ و $y = 0$ اللذين يعتبران مميزتين للمعادلة (1) . سنفرض أن الدالتين $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ قابلتان للتفاضل وتحققان شرط الترافق $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. بإجراء التكامل بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y

* انظر الملحق ٤ .

على التتالى للمعادلة (1) نحصل على :

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi$$

أو

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (2)$$

وبذلك فالمعادلة المبسطة التى لا تحتوى على المشتقات الأولى u_x, u_y والدالة المجهولة يتم التعبير عن الحل فى صورة تحليلية صريحة (2) . ومن العلاقة (2) ينتج مباشرة وجود حل المسألة المصاغة ووحدانيته .

ننتقل لحل المعادلة الخطية من النمط الزائدى

$$u_{xy} = a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + f(x, y) \qquad (3)$$

بالشروط الإضافية التالية على المميزتين $y = 0$ ، $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \qquad (3')$$

حيث $\varphi_2(y)$ ، $\varphi_1(x)$ تحققان شروط القابلية للتفاضل والترافق . وسنفترض أن المعاملات c ، b ، a دوال متصلة فى المتغيرين y ، x .

وتبين العلاقة (3) أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة التكاملية التفاضلية :

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (4)$$

ولحلها نستخدم طريقة التقريبات المتتالية . نختار بمثابة التقريب الصفرى الدالة :

$$u_0(x, y) = 0.$$

وعندئذ تعطى المعادلة (4) الصيغة التالية للتقريبات المتتالية :

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \Big[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \\ &\qquad + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, u_{n-1}\Big]\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ونشير إلى أن

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \Big[a(x, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, u_{n-1}\Big]\, d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \Big[a(\xi, y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, u_{n-1}\Big]\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

نثبت التقارب المنتظم للمتتابعات

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y)\right\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y)\right\}.$$

ولهذا الغرض ندرس الفروق

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) = \\ &= \int_0^y \int_0^x \Big[a(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, z_{n-1}(\xi, \eta)\Big]\, d\xi\, d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = \\ &= \int_0^y \Big[a(x, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, z_{n-1}(x, \eta)\Big]\, d\eta, \\ \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} = \\ &= \int_0^x \Big[a(\xi, y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, z_{n-1}(\xi, y)\Big]\, d\xi. \end{aligned}$$

نفرض أن M هى الحد العلوى للقيم المطلقة للمعاملات $a(x, y)$ ، $b(x, y)$. $c(x, y)$ وأن H هى الحد العلوى للقيم المطلقة للدالة $z_0 = u_1(x, y)$ ومشتقاتها

$$|z_0| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < H$$

عند تغير y , x داخل مربع ما $(0 \leqslant x \leqslant L\,,\ 0 \leqslant y \leqslant L)$. نكون التقديرات الحدية العظمى للدوال $z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}$. من الواضح أن

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM\frac{(x+y)^2}{2!},$$
$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$
$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

نفرض أنه تتحقق التقديرات الدائرة (recurring) التالية :

$$|z_n| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$
$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$
$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

حيث $K > 0$ عدد ثابت ما سنحدد قيمته فيما بعد . وبالاستعانة بهذه التقديرات والعلاقة للتقريب $(n+1)$ نحصل بعد عدة اختصارات تقوى المتباينة على :

$$|z_{n+1}| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right) <$$
$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},$$
$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$
$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$
$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial y}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$
$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

حيث

$$K = L + 2.$$

وفى الأطراف اليمنى لهذه المتباينات توجد بدقة حتى معاملات ثابتة الحدود العامة لمفكوك e^{2KLM} . وهذه التقديرات تبين أن متتابعة الدوال

$$u_n = u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

تتقارب تقاربًا منتظمًا إلى النهايات الدوال التى سنرمز لها كما يلى :

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y),$$
$$v(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$
$$w(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

وبالانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل فى العلاقات (6) , (5) سنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y\int_0^x [a(\xi, \eta)v + b(\xi, \eta)w + c(\xi, \eta)u]\, d\xi\, d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)v + b(x, \eta)w + c(x, \eta)u]\, d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)v + b(\xi, y)w + c(\xi, y)u]\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

والمتساويتان الناتجتان من هنا

$$v = u_x,$$
$$w = u_y$$

تكفلان التأكد من أن الدالة $u(x, y)$ تحقق المعادلة التكاملية التفاضلية

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y\int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \int_0^y\int_0^x [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u]\, d\xi\, d\eta, \quad (4)$$

وكذلك تحقق المعادلة التفاضلية الأصلية (3) وذلك يتم التأكد منه مباشرة بتفاضل (4) بالنسبة إلى y , x . والدالة $\bar{u} = u(x, y)$ تحقق أيضًا الشروط الإضافية كما يسهل التأكد من ذلك .

نثبت الآن وحدانية حل المسألة المدروسة $(3')-(3)$. بفرض وجود حلين $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ نحصل فورًا للفرق بينهما

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

على المعادلة التكاملية التفاضلية :

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU)\, d\xi\, d\eta.$$

نرمز بالرمز H_1 إلى الحد العلوى للقيم المطلقة :

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

عندما $0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant L$. وبتكرار التقديرات المجراة للدوال $z_n(x, y)$ نتأكد من صحة المتباينة :

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

لأية قيمة للعدد n . ومن هنا ينتج أن

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{أو} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y) \text{ ،}$$

مما يثبت وحدانية حل المسألة بالمعطيات على المميزات .

وإذا كانت المعاملات a, b, c ثابتة فإن المعادلة (3) بواسطة التعويض

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

تؤول إلى الصورة

$$v_{xy} + C_1 v = f. \tag{8}$$

وعند $C_1 = 0$ نحصل على المسألة للمعادلة المبسطة (1) التى يعطى حلها بالعلاقة (2) .

وإذا كان $C_1 \neq 0$ فإن حل المسألة للمعادلة (8) يمكن أيضًا الحصول عليه فى صورة تحليلية صريحة بالطريقة المشروحة فى بند ٥ .

مسائل :

١ ــ يدفع الهواء (بسرعة v) فى أنبوبة $(x > 0)$ مملوءة بمادة تحتوى على رطوبة (moisture) . نفرض أن $v(x, t)$ هى تركيز الرطوبة فى المادة الممتصة ، $u(x, t)$ تركيز الأبخرة الحرة . استنبط معادلة للدالتين $v(x, t)$ ، $u(x, t)$ تصف عملية التجفيف إذا كان : (١) لعملية ايزوثرمية (isothermal) ، (٢) ايزوثرم التجفيف (خط ثبات درجة الحرارة) على الصورة $u = \gamma v$ حيث γ ثابت الايزوثرمية (انظر أيضا الملحق ٥) .

٢ ــ يمر ماء ساخن بسرعة v فى أنبوبة $(x > 0)$. نفرض أن u هى درجة حرارة الماء فى الأنبوبة و v هى درجة حرارة جدران الأنبوبة ، و u_0 هى درجة حرارة الوسط المحيط . استنبط المعادلات للدالتين u ، v بإهمال توزيع درجة الحرارة فى مقطع الأنبوبة والجدران ومعتبرًا أنه يوجد على حدود الماء ــ الجدار والجدار ــ الوسط المحيط هبوط وصعود فى درجات الحرارة ويحدث تبادل حرارى وفقًا لقانون نيوتن (انظر الباب الثالث ، بند ١) .

بند ٥ ــ حل المعادلات الخطية العامة من النمط الزائدى

فقرة ١ : المؤثرات التفاضلية المترافقة . نثبت بعض العلاقات المساعدة التى تلزمنا للتعبير عن حلول المسائل الحدية فى الصورة التكاملية . نفرض أن

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\,u_x + b(x, y)\,u_x + c(x, y)\,u \tag{1}$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ دوال قابلة للتفاضل)

هو مؤثر تفاضلى خطى مناظر للمعادلة الخطية من النمط الزائدى . بضرب $\mathscr{L}[u]$ فى دالة ما v نكتب الحدود على انفراد فى الصورة

$$\begin{aligned}
vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, & vbu_y &= (bvu)_y - u\,(bv)_y,\\
vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, & vcu &= ucv.\\
vau_x &= (avu)_x - u\,(av)_x,
\end{aligned}$$

وبتجميع الحدود المنفردة هذه نحصل على :

$$v\mathscr{L}[u] = u\mathscr{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \tag{2}$$

حيث

$$\mathscr{M}(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (3)$$

$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)\,u = \quad (4)$$

$$= -(vu)_x + (2u_x + au)\,v, \quad (4')$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)\,u = \quad (5)$$

$$= (uv)_y - (2u_y - bu)\,v. \quad (5')$$

والمؤثران التفاضليان يسميان مترافقين إذا كان الفرق

$$v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$$

مجموعا للمشتقات الجزئية بالنسبة إلى y , x لصيغتين ما K , H .

والمؤثران اللذان ندرسهما الآن $\mathscr{M}$, $\mathscr{L}$ من الواضح أنهما مترافقان .

وإذا كان $\mathscr{L}[u] = \mathscr{M}[u]$ فإن المؤثر $\mathscr{L}[u]$ يسمى بالمؤثر ذاتى الترافق (self - conjugate) .

والتكامل الثنائى للفرق $v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v]$ على منطقة ما G محدودة بمنحنى متقطع الملوسة C يساوى

$$\iint_G (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\, d\xi\, d\eta = \int_C (H\, d\eta - K\, d\xi), \quad (6)$$

حيث v ، u دالتان اختياريتان قابلتان للتفاضل مرتين (علاقة جرين الثنائية الأبعاد أى فى المستوى)* .

فقرة ٢ : الصورة التكاملية للحل . نستعين بالعلاقة (6) لحل المسألة التالية :

عين حل المعادلة الخطية من النمط الزائدى

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\,u_x + b(x, y)\,u_y + c(x, y)\,u = -f(x, y), \quad (7)$$

الذى يحقق الشروط الابتدائية على المنحنى C ·

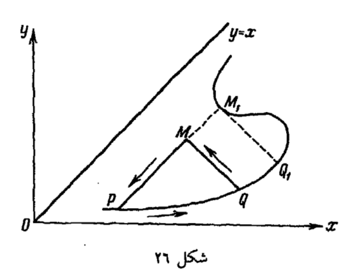
$$u|_C = \varphi(x), \qquad u_n|_C = \psi(x) \quad (7')$$

* نظر كتاب بيسكونوف «التفاضل والتكامل» الجزء الثانى طبعة دار «مير» باللغة العربية .

(u_n المشتقة فى اتجاه العمودى على المنحنى C) ووضح تلك المنطقة التى يتحدد فيها الحل بالشروط (7′) .

المنحنى C معطى عند ذلك بالمعادلة

$$y = f(x),$$



شكل ٢٦

حيث $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل . نضع على المنحنى C شرط ألا يقطعه أكثر من مرة واحدة مستقيم مميز من العائلتين $y + x = \text{const}$ و $y - x = \text{const}$ (لهذا الغرض يجب أن يكون $|f'(x)| < 1$) . والعلاقة (6) للمثلث المنحنى MPQ المحدود بالقوس PQ من المنحنى C ، وجزئى المميزتين MQ ، MP (شكل ٢٦) تعطى :

$$\iint\limits_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{O}^{M} (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int\limits_{M}^{P} (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int\limits_{P}^{Q} (H\, d\eta - K\, d\xi).$$

نحول التكاملين الأول والثانى المأخوذين على المميزتين MP ، MQ . فبالأخذ فى الاعتبار أن

$$\left\{ \begin{array}{ll} d\xi = -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} & \text{على } QM \\ d\xi = d\eta = +\frac{ds}{\sqrt{2}} & \text{على } MP \end{array} \right.$$

(ds عنصر طول القوس على امتدادى MP ، QM)

والاستعانة بالعلاقتين (5) ، (4) نحصل على :

$$\int_Q^M (H\,d\eta - K\,d\xi) = -\int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds =$$

$$= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds$$

وبالمثل

$$\int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds.$$

ومن هنا ومن العلاقة (6) ينتج أن

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi) - \frac{1}{2}\iint_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta. \quad (8)$$

وهذه العلاقة تعتبر متطابقة صحيحة لأى دالتين v ، u ملساوين بدرجة كافية .

نفرض أن u حل المسألة المصاغة أعلاه بالشروط الابتدائية المذكورة ، والدالة v تعتمد على النقطة M كبارامتر وتحقق الشروط (المطالب) التالية :

$$\mathscr{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \quad \text{داخل } \triangle MPQ \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,v \quad \text{على المميزة } MP \text{ ،} \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\,v \quad \text{على المميزة } MQ \text{ ،} \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

ومن الشروط على المميزات والشرط الأخير نجد أن :

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{على } MP \text{ .}$$

$$v = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{على} \quad MQ$$

حيث s_0 قيمة s فى النقطة M . وكما رأينا فى البند ٤ فإن المعادلة (9) وقيم الدالة v على المميزتين MQ . MP تحدد هذه الدالة تماما فى المنطقة MPQ . وتسمى الدالة v عادة بدالة ريمان .

وبذلك فالعلاقة (8) للدالة التى تحقق المعادلة (7) تأخذ الصورة النهائية التالية :

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q [v(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) +$$

$$+ uv(a\, d\eta - b\, d\xi)] + \frac{1}{2}\iint_{MPQ} v(M, M') f(M')\, d\sigma_{M'} \quad (d\sigma_{M'} = d\xi\, d\eta). \quad (10)$$

وهذه العلاقة تحل المسألة المطروحة لأن الصيغة تحت علامة التكامل المأخوذ على امتداد PQ تحتوى على دوال معلومة على القوس C . بالفعل عرفت الدالة v كما سبق ذكره أعلاه أما الدوال

$$u|_C = \varphi(x),$$
$$u_x|_C = u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$
$$u_y|_C = u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

فتحسب بواسطة المعطيات الابتدائية .

وتبين العلاقة (10) أنه إذا علمت المعطيات الابتدائية على القوس PQ فإنها تحدد تماما الدالة فى المثلث المميز $\triangle PMQ$ إذا كانت الدالة $f(x, y)$ معلومة فى هذه المنطقة * .

---

* إذا كانت المميزة تقطع المنحنى C فى نقطتين M_1 . P (انظر شكل ٢٦) فإن قيمة $u(M_1)$ لا يمكن اعطاؤها اختياريا وإنما تتحدد بالعلاقة (10) بشروط ابتدائية على القوس PQ_1 وقيم الدالة $f(x, y)$ فى $\triangle PM_1Q_1$.

والعلاقة (10) الناتجة بافتراض وجود الحل تحدد الحل بدلالة المعطيات الابتدائية والطرف الأيمن للمعادلة (7) وبذلك فإنها تثبت من حيث الجوهر وحدانية الحل (قارن بعلاقة دالمبرت ، الباب الثانى ، بند ٢ ، ص ٥٨).

ويمكن أن نوضح أن الدالة u المحددة بالعلاقة (10) تحقق شروط المسألة (7')—(7) . غير أننا لن نتوقف عند هذا الإثبات .

فقرة ٣ : التفسير الفيزيائى لدالة ريمان. نوضح المعنى الفيزيائى للدالة $v(M, M')$. ولهذا الغرض نعين حل المعادلة غير المتجانسة

$$\mathscr{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

بشروط ابتدائية صفرية على المنحنى C. وباللجوء إلى العلاقة (10) نرى أن الحل المطلوب يكون على الصورة

$$u(M) = \iint_{MPQ} v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{11}$$

نفرض أن $f_1(M)$ هى الدالة المحلية (local function) للنقطة M_1 التى تساوى الصفر فى كل مكان باستثناء جوار صغير S_ε للنقطة M_1 وتحقق شرط التوحيد

$$\iint_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = 1. \tag{12}$$

والعلاقة (11) فى هذه الحالة تأخذ الصورة

$$u_\varepsilon(M) = \iint_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{13}$$

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة يمكننا كتابة

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \iint_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*),$$

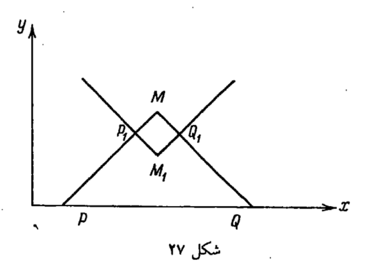
حيث M_1^* نقطة ما من نقط المنطقة (الجوار) S_ε .

وبتضييق ε ـ الجوار S_ε إلى نقطة $M_1 (\varepsilon \to 0)$ نجد أن :

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \tag{14}$$

والدالة f_1 كما رأينا فى عدة أمثلة تعتبر عادة كثافة القوة والمتغير y يعتبر الزمن . والصيغة

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = \iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{15}$$



شكل ٢٧

هى عبارة عن دفع القوة . ومن هنا ووفقاً للعلاقة (11) نستنتج أن $v(M, M_1)$ هى عبارة عن دالة تأثير وحدة الدفع المؤثرة فى النقطة M_1 . والدالة $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$ كانت معرفة على أساس أنها دالة فى البارامترات $M(x, y)$ تحقق بالإحداثيين η , ξ للنقطة M_1 المعادلة

$$\mathscr{M}_{(\xi, \eta)}[v] = 0 \tag{16}$$

بالشروط الإضافية (9a) .

ندرس الدالة

$$u = u(M, M_1),$$

التى تعتبر دالة فى البارامترات $M_1(\xi, \eta)$ تحقق بالإحداثيين x, y للنقطة M المعادلة

$$\mathscr{L}_{(x, y)}[u] = 0 \tag{17}$$

بالشروط الإضافية (انظر شكل ٢٧)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\, u \quad \text{على المميزة } M_1Q_1 ،\\ &\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\, u \quad \text{على المميزة } M_1P_1 ،\\ &u(M_1, M_1) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ومن هذين الشرطين نجد أن

$$u(M, M_1)^* = \left\{ \begin{array}{ll} e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} & (\text{على } M_1Q_1) \\ e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} & (\text{على } M_1P_1) \end{array} \right\} \tag{19}$$

$$u(M_1, M_1) = 1.$$

والمعادلة (17) والشرطان (18) تحدد الدالة u تماماً فى الشكل الرباعى $MP_1M_1Q_1$ المحدود بأجزاء المميزتين M_1P_1, M_1Q_1 , MP_1, MQ_1 .

وبتطبيق العلاقة (6) على الشكل الرباعى $MP_1M_1Q_1$ نحصل على :

$$\iint\limits_{MP_1M_1Q_1} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\, d\xi\, d\eta = \int_M^{P_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int_{Q_1}^{M} + \int_{M_1}^{Q_1} + \int_{P_1}^{M_1} = 0$$

($R(\xi, \eta)'$ نقطة التكامل المتغيرة فى MP_1M_1Q) . وبالاستعانة بالعلاقتين (4) ، (5) للصيغتين H و K والشروط (9a) على المميزات للدالة v يسهل حساب التكاملين الأول والثانى فى الطرف الأيمن

$$\int_M^{P_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int_{Q_1}^{M} (H\, d\eta - K\, d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

كما فعلنا عند استنباط العلاقة (10) .

وبالمثل ، بالاستعانة بالمتساويتين (5′) ، (4′) والشروط (19) للدالة $u(M, M_1)$ على المميزات نحصل على :

$$\int_{P}^{M_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi\, d\eta - (uv)_\eta\, d\xi] + \int_{P_1}^{M_1} v[(2u_\xi\, d\eta + 2u_\eta\, d\xi) + (au\, d\eta - bu\, d\xi)] =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} u\right) v\, ds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1}$$

$$\left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1} \quad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right).$$

وبتجميع كل هذه المتساويات الأربع نحصل على :

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1}$$

أو

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \tag{20}$$

وذلك لأن

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

وبذلك نرى أن $v(M, M_1)$ دالة تأثير وحدة الدفع المركز فى النقطة M_1 يمكن تعيينها كحل للمعادلة

$$\mathscr{L}_{(x,y)}[v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

بالشروط الإضافية (18) .

فقرة ٤ : المعادلات ذات المعاملات الثابتة . ندرس بمثابة المثال الأول على تطبيق العلاقة (10) المسألة بالمعطيات الابتدائية لمعادلة ذبذبات الوتر :

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left(y = at,\ f_1 = \frac{f}{a^2}\right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \qquad \left(\psi_1 = \frac{\psi}{a}\right).$$

فى العلاقة (10) القوس PQ هو عبارة عن جزء من المحور $y = 0$.

المؤثر

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

ذاتى الترافق لأن

$$\mathscr{M}(u) = \mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

وحيث أن $b = 0$ ، $a = 0$ فإن الدالة v تساوى على المميزتين MQ ، MP الواحد الصحيح . ومن هنا ينتج أن

$$v(M, M') \equiv 1$$

لأى نقطة M' داخل المثلث PMQ .

وبعد ذلك فبالأخذ بعين الاعتبار أنه فى حالتنا يكون

$d\eta = 0$ على PQ

نحصل على :

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q u_\eta \, d\xi + \frac{1}{2}\iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

وبملاحظة أن $P = P(x - y, 0),\ Q = Q(x + y, 0)$ حيث y ، x إحداثيا النقطة $M = M(x, y)$ والاستعانة بالشروط الابتدائية نجد أن :

$$u(x, y) = \\ = \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi)\, d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

وبالعودة إلى المتغيرين t ، x نحصل على علاقة دالمبرت

$$u(x, t) = \\ = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

التى قابلناها قبل ذلك فى فقرة ٩ ، بند ٢ (العلاقة (30)) .

وبمثابة المثال الثانى ندرس المسألة بالمعطيات الابتدائية للمعادلة ذات المعاملات الثابتة :

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0 \quad (21)$$

(c ، b ، a أعداد ثابتة) ،

$$u\,|_{y=0} = \varphi(x), \tag{22}$$

$$u_y\,|_{y=0} = \psi(x). \tag{23}$$

والتعويض

$$U = ue^{\lambda x+\mu y} \tag{24}$$

يكفل تحويل المعادلة (21) إلى صورة أبسط :

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \tag{25}$$

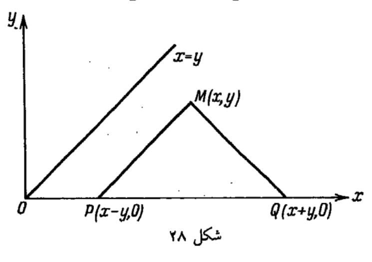
بالشروط الإضافية

$$U\,|_{y=0} = \varphi(x)\,e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{22'}$$

$$U_y\,|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right)e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{23'}$$

وذلك إذا اخترنا البارامترين μ ، λ بطريقة مناسبة ، بفرض

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \tag{26}$$



شكل ٢٨

ويؤول تعيين الدالة $U(x, y)$ بالمعطيات الابتدائية والمعادلة (25) إلى تكوين دالة ريمان $v(x, y; \xi, \eta)$.

والدالة v يجب أن تحقق الشروط :

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{ll} v=1 & \text{على المميزة } MP \text{ ،} \\ v=1 & \text{على المميزة } MQ \text{ (شكل ٢٨) .} \end{array}\right\} \quad (28)$$

ونبحث عن v فى الصورة

$$v=v(z), \quad (29)$$

حيث

$$z=\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2} \text{ أو } z^2=(x-\xi)^2-(y-\eta)^2 \text{ .} \quad (30)$$

وعلى المميزتين MP , MQ يؤول المتغير z إلى الصفر ومن ثم فإن $v(0)=1$.
وبعد ذلك فالطرف الأيسر للمعادلة (27) يتحول إلى ما يلى :

$$v_{xx}-v_{yy}+c_1v=v''(z)(z_x^2-z_y^2)+v'(z)(z_{xx}-z_{yy})+c_1v=0.$$

وبتفاضل صيغة z^2 مرتين بالنسبة إلى x و y نحصل على :

$$\begin{aligned} zz_x &= x-\xi, \\ zz_y &= -(y-\eta), \\ zz_{xx}+z_x^2 &= 1, \\ zz_{yy}+z_y^2 &= -1. \end{aligned}$$

ومن هنا ومن العلاقة (30) نحصل على :

$$z_x^2-z_y^2=1, \quad z_{xx}-z_{yy}=\frac{1}{z}.$$

وتأخذ المعادلة للدالة v الصورة التالية :

$$v''+\frac{1}{z}v'+c_1v=0$$

بالشرط $v(0)=1$. وحل هذه المعادلة هو دالة بيسال من الرتبة الصفرية (انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، القسم الأول ، بند ١)

$$v(z)=J_0(\sqrt{c_1}\,z)$$

أو

$$v(x,y;\ \xi,\eta)=J_0\left(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}\right) \quad (31)$$

ونستعين الآن لتعيين $U(x, y)$ بالعلاقة (10) التى تأخذ فى حالتنا الصورة التالية :

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q (vU_\eta \, d\xi - Uv_\eta \, d\xi) \quad (d\eta = 0). \quad (32)$$

وفى البداية نحسب التكامل المأخوذ على الجزء المستقيم PQ $(\eta=0)$:

$$\int_P^Q (vU_\eta - Uv_\eta)\, d\xi = \int_{x-y}^{x+y} \Big\{ J_0\big(\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - y^2]}\big)\, U_\eta(\xi, 0) -$$

$$- \frac{U(\xi, 0)\sqrt{c_1}\, y J_0'\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\varepsilon)^2 - y^2}\big)}{\sqrt{c_1 [(x-\xi)^2 - y^2]}} \Big\} d\xi. \quad (33)$$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية $(23'), (22')$ نحصل على :

$$U(x, y) = \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_1(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\big)\psi_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{c_1}\, y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\big)\varphi_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}, \quad (34)$$

ومن هنا ووفقاً للعلاقات $(23')$ و$(22')$ و (24) نحصل على العلاقة

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y)\, e^{-\frac{a-b}{2}y} + \varphi(x+y)\, c^{\frac{a+b}{2}y}}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} \Big\{ \frac{b}{2} J_0\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\big) -$$

$$- \sqrt{c_1}\, y \frac{J_1\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\big)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \Big\} e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} J_0\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}\big) e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi)\, d\xi, \quad (35)$$

التى تعطينا حل المسألة المطروحة .

ندرس الحالة الخاصة $b = 0$, $a = 0$ أى المعادلة

$$u_{xx} - y_{yy} + cu = 0.$$

من العلاقة (35) نحصل مباشرة على :

$$u(x, y)=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (36)$$

وبفرض $y=at$ ، $c_1=0$ فى هذه العلاقة نصل إلى علاقة دالمبرت

$$u(x, t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)\,d\xi, \qquad (37)$$

التى تعطى حل معادلة ذبذبات الوتر

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

بالشروط الابتدائية

$$u(x, 0)=\varphi(x),$$
$$u_t(x, 0)=\bar{\psi}(x),$$
$$\bar{\psi}(x)=a\psi(x)=au_y(y, 0).$$

مسائل على الباب الثانى

١ ـ حل المسألة ١ من بند ٤ بافتراض أنه فى اللحظة الابتدائية يكون تركيز الرطوبة ثابتًا على امتداد كل الأنبوبة وفى مدخلها يعطى دفق من الهواء الجاف.

٢ ـ حل المسألة ٢ من بند ٤ معتبرًا أن درجة الحرارة الابتدائية للمجموعة تساوى u_0 ، ويحتفظ طول الوقت بدرجة الحرارة فى نهاية الأنبوبة مساوية v_0 (حيث $v_0 > u_0$).

٣ ـ حل مجموعة المعادلتين التلغرافيتين (انظر بند ١ ، العلاقة (21)) :

$$i_x+Cv_t+Gv=0,$$
$$v_x+Li_t+Ri=0$$

للخط اللانهائى بالشروط الابتدائية

$$i(x, 0)=\varphi(x), \qquad v(x, 0)=\psi(x).$$

إرشاد : حول مجموعة المعادلتين (بند ١ ـ العلاقة (21)) إلى معادلة من الرتبة الثانية لإحدى الدالتين $i(x, t)$ أو $v(x, t)$ ـ مثلاً

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\, i_t + GRi$$

بالشروط الابتدائية $i(x, 0) = \varphi(x)$.

$$\left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i\right)_{t=0} = -\frac{1}{L}\psi'(x) - \frac{R}{L}\varphi(x) = \psi_0(x),$$

ثم استعن بعد ذلك بالعلاقة (35) .

٤ ـ ابحث حل المعادلة التلغرافية الناتج (العلاقة (35)) لحالة R ، G الصغيرين . ادرس الحالة النهائية $G \to 0, R \to 0$ واحصل من العلاقة (35) على علاقة دالمبرت لحل معادلة ذبذبات الوتر .

ملاحق الباب الثانى

ملحق ١ ـ حول ذبذبة أوتار الآلات الموسيقية

إن الوتر المتذبذب يثير ذبذبة للهواء تتقبلها أذن الانسان فى صورة صوت صادر من الوتر . وتتميز قوة الصوت بطاقة أو سعة الذبذبات وتتميز النغمة بفترة دورة الذبذبات أما جرس الصوت فيتميز بالعلاقة بين طاقات النغمة الأساسية والنغمات المتوافقة . ودون أن نتوقف عند العمليات الفسيولوجية لتقبل الصوت وعند عملية انتقال الصوت فى الهواء سنميز صوت الوتر بطاقته وفترة الدورة وتوزيع الطاقة على النغمات المتوافقة .

وفى الآلات الموسيقية تثار عادة الذبذبات المستعرضة للأوتار . وتقسم الآلات الوترية إلى ثلاثة أنماط : الآلات العودية (pizzicato) والآلات النقرية (percussion) والآلات القوسية (bow) . وفى الآلات النقرية (البيانو مثلا) تثار الذبذبة بصدمة (بنقرة) تكسب الوتر سرعة ابتدائية بدون انحراف ابتدائى ، أما فى الآلات العودية (على سبيل المثال فى القيثارة أو الهارب) فتثار الذبذبات بإكساب الوتر انحرافا ابتدائيا معينا بدون سرعة ابتدائية .

والذبذبات الحرة للوتر المثارة بأية طريقة يمكن التعبير عنها فى الصورة (انظر الباب الثانى ، بند ٣) :

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n}{l}x\quad\left(\omega_n=\frac{\pi n}{l}a\right).$$

وبمثابة تمرين على بند ٣ اقترحنا حل المسألة ١ الموجودة فى أساس النظرية المبسطة لإثارة أوتار الآلات العودية . ويوضح حل هذه المسألة أنه إذا كان الانحراف الابتدائى ممثلا فى صورة مثلث ارتفاعه h عند النقطة $x=c$ (شكل ٢٩) فإن

$$a_n=\frac{2hl^2}{\pi^2n^2c\,(l-c)}\sin\frac{\pi nc}{l},\quad b_n=0. \tag{1}$$

وطاقة التوافقية الـ n تساوى

$$E_n=\frac{1}{4}\rho l\omega_n^2a_n^2=Mh^2\frac{l^2a^2}{\pi^2n^2c^2\,(l-c)^2}\sin^2\frac{\pi nc}{l}\quad(M=\rho l) \tag{2}$$

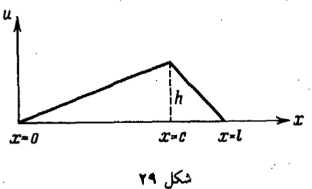
وتتناقص متناسبة عكسيا مع n^2 .

فى المسألة ٤ من بند ٣ تدرس النظرية المبسطة للإثارة النقرية (الصدمية) للأوتار بواسطة صدمة مركزة عند النقطة c بدفع K . وحل المسألة يعبر عنه فى الصورة

$$u(x,\ t)=\frac{2K}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nc}{l}\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\omega_n t\quad\left(\omega_n=\frac{\pi n}{l}a\right), \tag{3}$$

$$E_n=\frac{K^2}{M}\sin^2\frac{\pi nc}{l}. \tag{4}$$

وبذلك فعند إثارة الوتر بصدمة مركزة على فترة غير كبيرة طولها δ تكون طاقات التوافقيات المختلفة (التى لها δ صغيرة بالمقارنة مع البعد بين عقدتين) مختلفة قليلا فيما بينها ، والنغمة الصادرة عن الوتر المثار بهذه الطريقة تكون مشبعة بالنغمات المتوافقة . وهذا الاستنتاج يسهل التحقق منه بالتجربة المعملية . فإذا صدم الوتر المشدود (على آلة أحادية الوتر) بحد السكينة فإن الوتر سيرن ، ويكون الصوت مشبعا



شكل ٢٩

بالنغمات المتوافقة . وفى البيانو يثار الوتر بصدمة من مطرقة لفت بالجلد . ومثل هذه

الإثارة للوتر يمكن التعبير عنها بواسطة الأشكال التالية .

١ ـ يثار الوتر بإعطاء سرعة ابتدائية ثابتة v_0 على الفترة $(c - \delta, c + \delta)$ وهذه الحالة تناظر مطرقة مستوية صلبة عرضها 2δ وتصدم الوتر عند النقطة c وعملية الذبذبات توصف بالدالة (انظر المسألة ٣ فى بند ٣)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

وطاقات التوافقيات المنفردة تكون مساوية

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{n^2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

٢ ـ يثار الوتر بالسرعة الابتدائية

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x - c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & |x - c| < \delta, \\ 0 & |x - c| > \delta. \end{cases}$$

وهذه الحالة تناظر مطرقة محدبة صلبة عرضها 2δ . ومثل هذه المطرقة تثير فى مركز الفترة 2δ أكبر سرعة ابتدائية وهو ما يمكن التعبير عنه شكليا بالدالة الواردة أعلاه . والذبذبة المثارة بهذه الطريقة تكون على الصورة :

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t$$

وطاقات التوافقيات تساوى

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n \delta}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n c}{l}.$$

٣ ـ المطرقة المثيرة لذبذبة الوتر لا تعتبر مثالية الصلابة . وفى هذه الحالة تتحدد الذبذبات لا بالسرعة الابتدائية وإنما بالقوة المتغيرة مع الزمن . وبذلك نصل إلى المعادلة غير المتجانسة ذات الطرف الأيمن

$$F(x,\ t)=\begin{cases} F_0\cos\frac{x-c}{\delta}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{\tau}, & |x-c|<\delta,\\ & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & |x-c|>\delta,\\ & t>\tau. \end{cases}$$

وحل هذه المعادلة لحالة $t > \tau$ يعبر عنه فى الصورة :

$$u(x,\ t)=\frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\cos\frac{\pi n\delta}{l}\cos\frac{\omega_n\tau}{2}\sin\frac{\pi nc}{l}}{\left[1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{na\tau}{l}\right)^2\right]}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

وتوضح الأمثلة المدروسة أن عرض الفترة التى تحدث عليها الصدمة وطول الفترة الزمنية لاستمرار الصدمة لها تأثير جوهرى جدا على مقدار طاقات النغمات التوافقية العالية . ونشير علاوة على ذلك أن وجود المعامل $\sin\frac{\pi n}{l}c$ يوضح أنه إذا كان مركز الصدمة بالمطرقة يقع على عقدة التوافقية الـ n فإن طاقة التوافقية المناظرة تكون مساوية للصفر .

ووجود النغمات المتوافقة العالية (ابتداء من السابعة) يخل بتوافق (تناغم) الصوت ويحدث شعورا بالتنافر* (dissonance) أما وجود النغمات المتوافقة المنخفضة فيؤدى على العكس إلى شعور بكمال الصوت . وفى البيانو يختار مكان صدمة المطرقة قريبا من نقطة تثبيت الوتر بين عقدتى النغمتين المتوافقتين السابعة والثامنة وذلك للتقليل من طاقتهما . وبالتحكم فى عرض المطرقة وصلابتها يمكن زيادة الطاقة النسبية للنغمات المتوافقة المنخفضة (الثالثة والرابعة) . وفى آلات البيانو المصممة على النمط القديم التى كان صوتها حادا بل حتى رنانا بدرجة معينة كانت تستخدم مطارق أضيق وأكثر صلابة مما فى الآلات الحديثة .

ملحق ٢ ـ حول ذبذبة القضبان

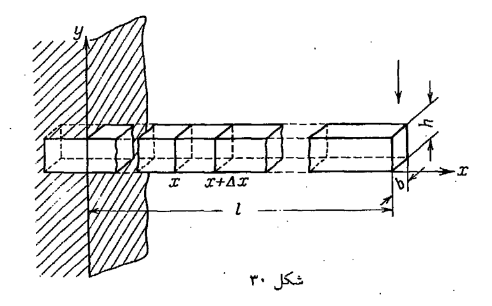
تشغل دراسة المعادلات من الرتبة الثانية عادة الحيز الأكبر فى مناهج طرق الفيزياء الرياضية . إلا أن عددا كبيرا من مسائل ذبذبات القضبان والألواح وغيرها يؤدى إلى معادلات من رتب أعلى .

* على سبيل المثال إذا كان التردد الأساسى (التوافقية الأولى) ٤٤٠ ذبذبة فى الثانية يناظر «لا» من الثمانية الأولى (الأوكتافا الأولى) فإن التردد الاكبر سبع مرات سيناظر «صول» فى الأوكتافا الرابعة . والفترة لا ــ صول التى تسمى بالسباعية الصغرى لها طابع غير مريح ومنفر للسمع .

وكمثال على المعادلة من الرتبة الرابعة ندرس مسألة الذبذبات الذاتية للشوكة الرنانة (tuning fork) وهى تكافئ مسألة ذبذبات قضيب رقيق مستطيل المقطع أحد طرفيه مزنوق زنقة صلبة فى كتلة خرسانية . وتعيين شكل ذبذبات الشوكة الرنانة وترددا تها يؤول إلى حل « معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب »

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

ونصل إلى مثل هذه المعادلة فى كثير من المسائل المتعلقة بذبذبات القضبان وعند حساب استقرار الاسطوانات الدائرة وكذلك عند دراسة الاهتزازات فى السفن .



شكل ٣٠

نورد الاستنباط الأولى للمعادلة (1) . ندرس قضيبا مستطيل المقطع طوله l $(0 \leqslant x \leqslant l)$ وارتفاعه h وعرضه b (شكل ٣٠) . نفصل عنصرا للطول dx . وبعد الانحناء تكوّن المقاطع الطرفية للعنصر المأخوذ التى يفترض أنها مستوية - زاوية $d\varphi$. وإذا كانت التشوهات (الانفعالات) صغيرة وطول محور القضيب عند الانحناء لا يتغير $(dl = dx)$ فإن

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx.$$

شكل ٣١

وطبقة المادة التى تبعد عن محور القضيب $y = 0$ بمسافة η يتغير طولها بمقدار $\eta\, d\varphi$

(شكل ٣١) . ووفقا لقانون هوك تكون قوة الشد المؤثرة على الطبقة مساوية :

$$dN = E \cdot b\, d\eta \cdot \frac{\eta\, d\varphi}{dx} = -E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta\, d\eta,$$

حيث E معامل مرونة المادة المصنوع منها القضيب . وعزم الثنى الكامل للقوى المؤثرة فى المقطع x يساوى

$$M = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2\, d\eta = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \qquad (2)$$

حيث

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2\, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

هو عزم القصور الذاتى للمقطع المستطيل حول المحور الأفقى . نرمز بالرمز $M(x)$ للعزم المؤثر على الجزء الأيمن للقضيب فى كل مقطع . وفى المقطع $x + dx$. من الواضح انه يؤثر عزم القوى المساوى $(M + dM)$ــ .

والعزم الاضافى dMــ يتزن بعزم القوى المماسية

$$dM = F\, dx.$$

ومن هنا ووفقا للمتساوية (2) نحصل على مقدار القوة المماسية

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \qquad (3)$$

وبمساواة القوة المحصلة المؤثرة على العنصر

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

بحاصل ضرب كتلة العنصر فى السرعة

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

حيث ρ كثافة القضيب ، S مساحة المقطع العرضى (ونحن نهمل عند ذلك

الحركة الدورانية عند الثنى) ، نحصل على معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0 \quad \left(a^2=\frac{EJ}{\rho S}\right). \tag{1}$$

والشروط الحدية للطرف المزنوق $x=0$ هى ثبات القضيب وأفقية المماس

$$y\,|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0. \tag{4}$$

وعلى الطرف الحر يجب أن يساوى الصفر كل من عزم الثنى (2) والقوة المماسية (3) ومن هنا ينتج أن

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0, \quad \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l}=0. \tag{5}$$

ولتعيين حركة القضيب تماما يجب إعطاء الشروط الابتدائية أيضا ، أى الانحراف الابتدائى والسرعة الابتدائية

$$y\,|_{t=0}=f(x) \quad , \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{6}$$

وبذلك تؤول المسألة إلى حل المعادلة (1) بالشروط الحدية (5) ,(4) والشروط الابتدائية (6) .

سنحل المسألة بطريقة فصل المتغيرات بفرض ان

$$y=Y(x)\,T(t). \tag{7}$$

بالتعويض عن صورة الحل المقترحة فى (1) نحصل على :

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)}=-\lambda.$$

وللدالة $Y(x)$ نحصل على مسألة القيم الذاتية :

$$Y^{(4)}-\lambda Y=0, \tag{8}$$

$$Y\,|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=l}=0, \quad \left.\frac{d^3Y}{dx^3}\right|_{x=l}=0. \tag{9}$$

والحل العام للمعادلة (8) يكون على الصورة

$$Y(x)=A\cosh\sqrt[4]{\lambda}x+B\sinh\sqrt[4]{\lambda}x+C\cos\sqrt[4]{\lambda}x+D\sin\sqrt[4]{\lambda}x.$$

ومن الشرطين $Y(0)=0,\ Y'(0)=0$ نجد أن $C=-A,\ D=-B$ ومن هنا ينتج أن

$$Y(x)=A\left(\cosh\sqrt[4]{\lambda}x-\cos\sqrt[4]{\lambda}x\right)+B\left(\sinh\sqrt[4]{\lambda}x-\sin\sqrt[4]{\lambda}x\right).$$

والشرطان $Y''(l)=0$ ، $Y'''(l)=0$ يعطيان

$$A\left(\cosh\sqrt[4]{\lambda}l+\cos\sqrt[4]{\lambda}l\right)+B\left(\sinh\sqrt[4]{\lambda}l+\sin\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,$$
$$A\left(\sinh\sqrt[4]{\lambda}l-\sin\sqrt[4]{\lambda}l\right)+B\left(\cosh\sqrt[4]{\lambda}l+\cos\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0.$$

وهذه المجموعة المتجانسة يكون لها حلان غير تافهين A ، B ، إذا كان محدد المجموعة يساوى الصفر. وبمساواة هذا المحدد بالصفر نحصل على معادلة متساوية (transcendental) لحساب القيم الذاتية

$$\sinh^2\sqrt[4]{\lambda}l-\sin^2\sqrt[4]{\lambda}l=\cosh^2\sqrt[4]{\lambda}l+2\cosh\sqrt[4]{\lambda}l\cos\sqrt[4]{\lambda}l+\cos^2\sqrt[4]{\lambda}l.$$

وحيث أن $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ فإن هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$\cosh\mu\cdot\cos\mu=-1\quad\left(\mu=\sqrt[4]{\lambda}l\right).\tag{10}$$

وجذور هذه المعادلة (10) يمكن حسابها بسهولة ، وذلك مثلا بالطريقة البيانية :

$$\mu_1=1.875,$$
$$\mu_2=4.694,$$
$$\mu_3=7.854,$$
$$\cdots\cdots$$

$\mu_n\approx\frac{\pi}{2}(2n-1)$ عندما $n>3$.

والعلاقة الاخيرة تعطى قيمة μ_n بدقة حتى ثلاثة أرقام عشرية ابتداء من $n=3$ وبدقة حتى ستة أرقام عشرية لقيم $n\geqslant 7$.

ندرس الآن ترددات ذبذبات الشوكة الرنانة . المعادلة

$$T''+a^2\lambda_n T=0$$

تحققها الدوال المثلثية

$$T_n(t)=a_n\cos 2\pi\nu_n t+b_n\sin 2\pi\nu_n t$$

بالتردد

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

والترددات ν_n للذبذبات الذاتية تتناسب فيما بينها كمربعات μ_n . وحيث أن

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6.267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17.548,$$

فإن النغمة الذاتية الثانية أعلى من النغمة الأساسية بأكثر من اوكتافتين ونصف أى أعلى من التوافقية السادسة للوتر ذى نفس النغمة الأساسية . أما الذبذبة الذاتية الثالثة فأعلى من النغمة الأساسية بأكثر من أربعة أوكتافات . فعلى سبيل المثال إذا كانت النغمة الأساسية للشوكة الرنانة 440 ذبذبة فى الثانية (المعيار المصطلح عليه لـ a' النوتة «لا» من الأوكتافا الأولى) فإن التردد الذاتى التالى للشوكة الرنانة سيكون مساويا 2757.5 ذبذبة فى الثانية (بين $c'''' = 2637.3$ و $f'''' = 2794.0$ أى بين النوتتين «مى» و «فا» من الاوكتافا الرابعة فى السلم المنتظم الجرس) أما التردد الذاتى الثالث الذى يشكل 7721.1 ذبذبة فى الثانية فيخرج عن نطاق سلم الأصوات الموسيقية الذاتية .

وعند إثارة ذبذبات الشوكة الرنانة بصدمة (نقرة) توجد ليس فقط التوافقية الأولى بل والتوافقيات الأعلى أيضا وهذا ما يفسر الصوت المعدنى فى اللحظة الابتدائية . غير أنه مع مرور الزمن تخمد التوافقيات العليا بسرعة وتصدر الشوكة الرنانة الصوت النقى للنغمة الأساسية.

ملحق ٣ ـ ذبذبات الوتر المحمل

١ ـ صياغة المسألة. ندرس مسألة ذبذبات الوتر المثبت الطرفين $(0, l)$ وضعت عند عدة نقط من نقاطه $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ الكتل المركزة M_i .

ويمكن الحصول على الشروط عند النقطة x_i بطريقتين . إذا أثرت فى النقطة x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ قوة مركزة $F_i(t)$ فإنه يجب أن تتحقق العلاقتان

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \tag{1}$$

$$ku_x\Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \tag{2}$$

وفى حالتنا هذه يجب فهم F_i على أنها قوة القصور . وبالتعويض فى العلاقة (2) عن

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

نحصل على

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \tag{3}$$

ومن الممكن استنباط العلاقة (3) بطريقة أخرى . نوزع الكتلة M_i على المنطقة (الجوار) $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ بكثافة ثابتة δ_i ونستعين بمعادلة الذبذبات للوتر غير المتجانس

$$(\rho + \delta_i)\, u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \tag{4}$$

حيث ρ كثافة الوتر . نفرض أن $u_\varepsilon(x, t)$ هى حل هذه المعادلة .

بتكامل المعادلة (4) بالنسبة إلى x فى الحدود من $x_i - \varepsilon$ إلى $x_i + \varepsilon$ والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على الشرط (3) للدالة $u(x, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$. ولن نتوقف هنا عند تبرير الانتقال إلى النهاية .

نصوغ مسألتنا صياغة كاملة :

عين حل معادلة الذبذبات

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

الذى يحقق الشروط الحدية

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

وشروط الترافق فى النقط $x = x_i$

$$\left.\begin{aligned} &u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \\ &M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\right\} \tag{7}$$

والشروط الابتدائية

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

حيث $\psi(x)$ ، $\varphi(x)$ دالتان معطاتان .

٢ ـ الذبذبات الذاتية للوتر المحمل . نتوقف فى البداية عند بحث الترددات الذاتية والمقاطع الجانبية للموجات المستقرة للوتر المحمل . ولهذا الغرض يجب تعيين حل المسألة المطروحة القابل للتعبير عنه فى صورة حاصل الضرب

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{9}$$

بالتعويض بهذه الصيغة فى المعادلة (5) والاستعانة بالشروط الحدية نحصل بعد فصل المتغيرات على

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{10}$$

و

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dX}{dx}\right) + \lambda\rho X = (kX')' + \lambda\rho X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned}\right\}$$

وتعطى شروط الترافق :

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$
$$M_i X(x_i)\, T'' = kX' \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} T.$$

وبالأخذ فى الاعتبار المعادلة (10) نكتب العلاقة الأخيرة فى الصورة

$$kX' \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

وبذلك نحصل للدالة $X(x)$ على مسألة القيم الذاتية التالية :

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda\rho X = 0, \qquad k(x) > 0, \qquad \rho(x) > 0, \tag{11}$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} & X(x_i - 0) = X(x_i + 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \\ & kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

والصفة المميزة للمسألة الحدية محل الدراسة هى أن البارامتر λ لا يدخل فقط فى المعادلة وإنما يدخل أيضا فى الشروط الإضافية .

ولن نتوقف هنا عند إثبات وجود فئة لانهائية من القيم الذاتية والدوال الذاتية وإيجابية القيم الذاتية ونظرية القابلية للتحليل . وهذه المسألة الحدية مثلها مثل

المسائل من النمط المعتاد التى درسناها فى بند ٣ من الباب الثانى تؤول إلى معادلة تكاملية ما تعتبر فى حالتنا هذه معادلة تكاملية محملة وتكافئ المعادلة التكاملية فى تكاملات ستيلتيس .

ندرس بتفصيل أكبر استنباط شرط تعامد الدوال الذاتية

$$X_1(x), \quad X_2(x), \ldots,$$

الذى يكون فى حالتنا هذه مختلفا عن الشرط (92) بند ٣ ويسمى بشرط التعامد بالأحمال .

وكما وضحنا فى الباب الثانى (انظر بند ٣) ، تكون الدوال الذاتية للمسألة الحدية

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX}{dx}\right) + \lambda\rho X = 0,$$
$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

متعامدة بالوزن ρ فى الفترة $(0, l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n). \tag{14}$$

وبتوزيع كل كتلة M_i بكثافة ثابتة δ_i على فترة ما $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد صغير ، نصل إلى مسألة الذبذبات الذاتية للوتر غير المتجانس بالكثافة $\rho_\varepsilon(x)$. نفرض أن $\lambda_{\varepsilon n}$ و $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ هى القيم الذاتية والدوال الذاتية لهذه المسألة التى يجب أن يتحقق لها شرط التعامد

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

وبفصل التكاملات المأخوذة على الفترات $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ فى المتساوية (15) والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على العلاقة

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \qquad (m \neq n), \tag{16}$$

التى تسمى بشرط التعامد بالأحمال .

ومرة أخرى نترك جانبا موضوع إمكانية هذا الانتقال إلى النهاية .

وشرط التعامد (16) يمكن الحصول عليه بطريقة شكلية بحتة من المعادلة والشروط (13)—(11) . نفرض أن $X_n(x)$ ، $X_m(x)$ دالتان ذاتيتان للمسألة (13)—(11) تناظران القيمتين الذاتيتين λ_n ، λ_m وتحققان المعادلتين

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_m}{dx}\right)+\lambda_m\rho X_m=0,$$
$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_n}{dx}\right)+\lambda_n\rho X_n=0.$$

نضرب المعادلة الأولى فى $X_n(x)$ والثانية فى $X_m(x)$ ونطرح الناتج الثانى من الأول . بتكامل المتساوية الناتجة بعد ذلك على الترتيب على المناطق $(0,\ x_1);\ (x_1,x_2);\ldots;\ (x_N,\ l)$ وجمع التكاملات نحصل على

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx-$$
$$-\sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_i+1}\frac{d}{dx}[X_mkX_n'-X_nkX_m']\,dx=0, \qquad (17)$$

علما بأننا فرضنا $x_0=0,\ x_{N+1}=l$. وبإجراء التكامل لكل حد من حدود المجموع ثم تجميع الحدود المناظرة للتعويضين $x=x_i+0$ ، $x=x_i-0$ نحصل على مجموع الحدود على الصورة

$$A_i=(X_mkX_n'-X_nkX_m')_{x=x_i-0}-(X_mkX_n'-X_nkX_m')_{x=x_i+0}.$$

وعند ذلك فالتعويضين عند $x=l$ ، $x=0$ يؤولان إلى الصفر وفقا للشروط الحدية .

ولحساب A_i نستعين بشروط الترافق

$$\left.\begin{aligned}X_j(x_i-0)&=X_j(x_i+0),\\ kX_j'(x_i+0)-kX_j'(x_i-0)&=-M_i\lambda_jX_j(x_i)\end{aligned}\right\}\quad (j=m,\ n). \qquad (13')$$

وبكتابة A_i فى الصورة

$$A_i=X_m(x_i)\,[kX_n'(x_i-0)-kX_n'(x_i+0)]-$$
$$-X_n(x_i)\,[kX_m'(x_i-0)-kX_m'(x_i+0)]$$

وبالاستعانة بالعلاقة (13′) نجد أن

$$A_l = X_m(x_l) M_l \lambda_n X_n(x_l) - X_n(x_l) M_l \lambda_m X_m(x_l) = \\ = M_l X_m(x_l) X_n(x_l)(\lambda_n - \lambda_m).$$

والآن يمكن كتابة المتساوية (17) فى الصورة

$$(\lambda_m - \lambda_n)\left\{ \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx + \sum_{l=1}^{N} M_l X_m(x_l) X_n(x_l) \right\} = 0.$$

وإذا كان $\lambda_m \neq \lambda_n$ فإنه ينتج من هنا مباشرة شرط التعامد بالأحمال (16) .

ويتحدد معيار (norm) الدوال الذاتية $X_n(x)$ بالعلاقة

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx + \sum_{l=1}^{N} M_l X_n^2(x_l). \qquad (18)$$

ومن الواضح أنه عند تحليل دالة ما $f(x)$ فى المتسلسلة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

تتحدد معاملات التحليل بالعلاقة

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \rho(x)\, dx + \sum_{l=1}^{N} M_l f(x_l) X_n(x_l)}{\| X_n \|^2}. \qquad (19)$$

والمسألة بالمعطيات الابتدائية المصاغة فى فقرة ١ تحل بالطريقة المعتادة لفصل المتغيرات . وبالمثل تدرس مسألة ذبذبة القضيب (أو العارضة) عند وجود كتل مركزة .

ومسألة ذبذبات الوتر المحمل بكتل مركزة تجد تطبيقا واسع النطاق فى الفيزياء والعلوم التكنيكية . لقد حل بواسون مسألة الحركة الطولية لثقل معلق بخيط مرن . ووضح أ . كريلوف أنه إلى هذه المسألة تؤول مسائل نظرية مبين المحرك البخارى (steam engine indicator) ومسائل الذبذبات الدورانية (الالتوائية) للاسطوانة المثبت بطرفها حذافة (flywheel) والمسائل على مختلف أنواع الصمامات « الرعاشة » وغيرها .

ولنظرية العديد من أجهزة القياس يكون من المهم دراسة الذبذبات الدورانية لخيط علقت بطرفه كتلة (مرآة مثلا) . وقد اكتسبت المسائل من هذا النمط أهمية كبيرة خاصة نتيجة لدراسة استقرار اهتزازات أجنحة الطائرات . فلحل هذه المسألة لا بد من حساب الترددات الذاتية للجناح (عارضة متغيرة المقطع) المحمل بالكتل (الموتورات) . وعلاوة على ذلك فإن المسألة المدروسة هذه تقابلنا عند حساب الذبذبات الذاتية للهوائيات المحملة بالسعات المركزة وملفات الحث الذاتى المركزة (فيما يتعلق بذلك انظر الملحق المخصص للتشابه بين الذبذبات الميكانيكية والكهرومغناطيسية) .

ولن نتوقف هنا عند الطرق التقريبية لتعيين القيم والدوال الذاتية للمسألة وهى الطرق المماثلة للطرق التقريبية لتعيين المقادير المناظرة للوتر غير المتجانس .

٣ ـ وتر بطرفه ثقل . تشكل أهمية عملية كبيرة مسألة ذبذبات الوتر المتجانس الذى يثبت أحد طرفيه $(x=0)$ بلا حركة ويعلق بالطرف الآخر $(x=l)$ ثقل كتلته M .

وفى هذه الحالة يأخذ الشرط عند $x=l$ الصورة

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

ولسعة الموجات المستقرة نحصل على المعادلة

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

بالشروط الحدية

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho}\lambda_n X_n(l).$$

ومن هنا نجد أن

$$X_n(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,l},$$

حيث λ_n تعين من المعادلة

$$\cot\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}. \tag{20}$$

ويأخذ شرط تعامد الدوال $\{X_n(x)\}$ الصورة

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho \, dx + M X_n(l) X_m(l) = 0.$$

نحسب مربع المعيار

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho \, dx + M X_n^2(l).$$

وبالاستعانة بالمعادلة (20) نحصل على :

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

وتحل المسألة بالشروط الابتدائية بالطريقة المعتادة .

٤ ـ تصحيحات للقيم الذاتية . نحسب التصحيحات للترددات الذاتية فى حالة الأحمال M الصغيرة والكبيرة . وللبساطة ندرس تلك الحالة عندما يكون الثقل معلقا بطرف الوتر . وهناك حالتان نهائيتان محتملتان .

١ ـ $M=0$. الطرف $x=l$ حر . وتتحدد القيم الذاتية من العلاقة

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

٢ ـ $M=\infty$. الطرف $x=l$ مثبت بصلابة : $u(l, t)=0$. والقيم الذاتية تتحدد من العلاقة .

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

وسنهتم بحالتى الأحمال M الصغيرة $(M \to 0)$ والكبيرة $(M \to \infty)$.

(أ) M صغيرة . نعين التصحيح للقيمة الذاتية $\lambda_n^{(1)}$ بفرض

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \varepsilon M, \tag{21}$$

حيث ε عدد ما . بالتعويض بـ (21) فى المعادلة (20) وإهمال M^2 وقوى M الأعلى نحصل على :

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l}\right), \tag{22}$$

أى أن الترددات الذاتية للوتر المحمل تتزايد عندما $M \to 0$ مقتربة من الترددات الذاتية للوتر الحر الطرف .

(ب) M كبيرة . باختيار $1/M$ بمثابة بارامتر الصغر نضع

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M} .$$

والمعادلة (20) تعطى :

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}} l} .$$

وعند ذلك أهملنا الحدود المحتوية على $1/M^2$ وقوى $1/M$ الأعلى .

وبذلك فإن

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}} l} \frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Mk} . \tag{23}$$

أى أنه بزيادة الأحمال تتناقص الترددات الذاتية مقتربة بانتظام إلى الترددات الذاتية للوتر المثبت الطرفين .

ملحق ٤ ـ معادلات ديناميكا الغازات ونظرية الموجات الصادمة (الانفجارات)

١ ـ معادلات ديناميكا الغازات . قانون حفظ الطاقة . نتجت معادلات الصوتيات (انظر بند ١) بافتراض صغر سرعات حركة الغاز والتغيرات الصغيرة فى الضغط مما سمح بتحويل معادلات الهيدروديناميكا إلى معادلات خطية .

وفى المسائل الناشئة عند دراسة طيران الصواريخ والطائرات السريعة وفى نظرية علم القذائف (ballistics) والموجات المفجرة .. الخ نضطر إلى مقابلة عمليات هيدروديناميكية تتميز بسرعات كبيرة وتدرجات (gradients) للضغط كبيرة . وفى هذه الحالة فإن التقريب الخطى للصوتيات يصبح غير صالح ولابد من استخدام المعادلات اللاخطية للهيدروديناميكا . وحيث إن مثل هذه الحركات نقابلها فى الحياة العملية فى الغازات يصطلح على تسمية هيدروديناميكا السرعات الكبيرة بديناميكا الغازات .

ومعادلات ديناميكا الغازات فى حالة حركة الغازات الأحادية البعد (فى اتجاه المحور x) تكون على الصورة :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \qquad \text{(معادلة الاتصال)} \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{(معادلة الحركة)} \qquad (2)$$

$$p=f(\rho,\ T) \qquad \text{(معادلة الحالة)} \qquad (3)$$

وبذلك فمعادلات ديناميكا الغازات هى عبارة عن معادلات حركة سائل مثالى قابل للانضغاط (compressible) بانعدام القوى الخارجية .

ننتقل الآن إلى استنباط قانون حفظ الطاقة . طاقة وحدة الحجم تساوى

$$\frac{\rho v}{2}+\rho\varepsilon, \qquad (4)$$

حيث الحد الأول هو طاقة الحركة والحد الثانى هو الطاقة الداخلية . ومن الواضح أن ε هنا ترمز إلى الطاقة الداخلية لوحدة الكتل .

وللغاز المثالى $\varepsilon=c_vT$ حيث c_v هى السعة الحرارية عند ثبات الحجم . T درجة الحرارة . نحسب تغير الطاقة فى وحدة الزمن

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon). \qquad (5)$$

وبإجراء التفاضل فى الحد الأول والاستعانة بالمعادلتين (2) .(1) نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)=\frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)-\rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-v\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (6)$$

ولحساب المشتقة $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$ نلجأ إلى المبدأ الأول فى الديناميكا الحرارية (الثرموديناميكا) الذى يعبر عن قانون حفظ الطاقة

$$dQ=d\varepsilon+p\,d\tau, \qquad (7)$$

حيث dQ كمية الحرارة التى تكتسبها (أو تمنحها) المجموعة من الخارج . $p\,d\tau$ الشغل المبذول عند تغير الحجم بمقدار $d\tau$ ($\tau=1/\rho$ الحجم النوعى) .

وإذا كانت العملية أدياباتية (لا يوجد تبادل حرارى مع الوسط) فإن

$$dQ = 0$$

و

$$d\varepsilon = -pd\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2}d\rho. \qquad (8)$$

وبالاستعانة بهذه المتساوية نجد أن

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\, d\rho + \rho\, d\varepsilon = \varepsilon\, d\rho + \frac{p}{\rho}d\rho = w\, d\rho, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = w\frac{\partial\rho}{\partial t}, \qquad (10)$$

حيث

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \qquad (11)$$

هى الدالة الحرارية أو المحتوى الحرارى لوحدة الكتل .

والمشتقة $\frac{\partial w}{\partial x}$ وفقا للعلاقتين (9) و (11) تحقق المعادلة

$$\rho v\frac{\partial w}{\partial x} = v\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (12)$$

وبالأخذ فى الاعتبار المتساويات (12) ,(10) ,(6) ,(5) ,(2) نحصل على قانون حفظ الطاقة فى الصورة التفاضلية :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \qquad (13)$$

ولتوضيح المعنى الفيزيائى لهذه العلاقة نكاملها على حجم ما (x_1, x_2) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)dx = -\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

وفى الطرف الأيسر يوجد تغير الطاقة فى وحدة الزمن على الفترة (x_1, x_2) وفى الطرف الأيمن يوجد دفق الطاقة المتسربة خلال وحدة الزمن من الحجم المعنى .

وإذا لم يكن من الممكن إهمال ظاهرة التوصيل الحرارى فإن معادلة حفظ الطاقة تأخذ الصورة

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - \varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right], \qquad (14)$$

حيث $\varkappa$ معامل التوصيل الحرارى .

٢ ــ الموجات الصادمة . شرط الاتصال الديناميكى . فى حالة السرعات الكبيرة من الممكن حدوث حركات تنشأ عندها على بعض السطوح المتحركة فى الفراغ انفصالات للاتصال فى توزيع الكميات الهيدروديناميكية (الضغط ، السرعة ، الكثافة .. الخ) . وهذه الانفصالات يصطلح على تسميتها بالموجات الصادمة أو الانفجارات (blast) .

وعلى سطح الانفصال (جبهة الموجة الصادمة) يجب أن تتحقق شروط اتصال دفق المادة ، والطاقة وكمية الحركة (شروط جيوجونيو) . ننتقل إلى استنباط هذه الشروط .

نحول المعادلة (2) إلى صورة مناسبة لهدفنا . نضرب (1) فى v ونجمع الناتج على (2) فنحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2). \qquad (2')$$

نكتب الآن معادلات الاتصال والحركة وحفظ الطاقة فى الصورة

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \qquad (1')$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2), \qquad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \qquad (13)$$

ندرس على المستوى (x, t) المنحنى $x=\alpha(t)$ الذى يعتبر «أثرا» لسطح الانفصال على المستوى (x, t) . نفرض أن AC قوس ما من خط الانفصال $x=\alpha(t)$ حيث C ، A نقطتان إحداثياتها $x_1 ; t_1$ ، $x_2 = x_1 + \Delta x ;\ t_2 = t_1 + \Delta t$ على الترتيب . نكون المستطيل $ABCD$ الذى أضلاعه توازى محورى الإحداثيات .

نكتب قانون حفظ المادة فى صورة تكاملية :

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_{t_2} - (\rho)_{t_1}]\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}]\, dt, \qquad (15)$$

حيث فى الطرف الأيسر يوجد تغير الكتلة على الفترة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية

وفى الطرف الأيمن توجد كمية المادة المتسربة من الفترة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) . وإذا كانت الدالتان ρv , ρ متصلتين وقابلتين للتفاضل فى كل مكان داخل $ABCD$ فإن المعادلة (15) تكون مكافئة للمعادلة $(1')$. وفى الحالة محل الدراسة لا يتحقق ذلك .

نستعين بنظرية القيمة المتوسطة لكل حد على انفراد :

$$\left[(\rho)_{\substack{t=t_2 \\ x=x^*}} - (\rho)_{\substack{t=t_1 \\ x=x^{**}}}\right] \frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{\substack{x=x_2 \\ t=t^*}} + (\rho v)_{\substack{x=x_1 \\ t=t^{**}}},$$

حيث x^*, x^{**}, t^*, t^{**} القيم المتوسطة للمتغيرين x , t .

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \to 0$ $(x_2 \to x_1)$ و $\Delta t \to 0$ $(t_2 \to t_1)$ والرمز بالدليل 2 إلى قيم الدوال أعلى المنحنى $x = \alpha(t)$ (وراء جبهة الموجة الصادمة) وبالدليل 1 إلى قيم الدوال أسفل المنحنى (أمام الجبهة) نحصل على :

$$(\rho_2 - \rho_1) U = -(\rho v)_1 + (\rho v)_2, \tag{16}$$

حيث

$$U = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعة الموجة الصادمة .

وفى مجموعة الإحداثيات المتحركة مع الموجة الصادمة يرمز

$$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2$$

لسرعة الجسيمات أمام وخلف جبهة الموجة الصادمة على الترتيب . والعلاقة (16) الناتجة فيما سبق يمكن كتابتها على الصورة

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{16'}$$

وهذه المتساوية تعبر عن اتصال دفق المادة عبر جبهة الموجة الصادمة .

وبكتابة قانون حفظ كمية الحركة فى الصورة التكاملية نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[(\rho v)_{t_2} - (\rho v)_{t_1}\right] dx = -\int_{t_1}^{t_2} \left[(p + \rho v^2)_{x_2} - (p + \rho v^2)_{x_1}\right] dt,$$

حيث فى الطرف الأيمن يوجد مجموع دفع القوى المؤثرة (الضغوط) ودفق كمية الحركة . وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ نحصل على قانون حفظ دفق كمية الحركة على الجبهة

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

أو

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \qquad (17)$$

وبالمثل نحصل أيضا على معادلة حفظ الطاقة على الجبهة :

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2$$

التى تأخذ بعد اختصارات بسيطة الصورة التالية :

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

أو وفقا للشرط (16) :

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (18)$$

وبذلك يجب أن تتحقق على جبهة الموجة الصادمة المعادلات (شروط الاتصال الديناميكى أو شروط جيوجونيو)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \qquad (16')$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \qquad (17)$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (18)$$

ومن المعادلتين الأولى والثانية (17) , (16') نعبر عن u_2 , u_1 بدلالة ρ , p :

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

ومنها

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}(p_1 - p_2).$$

وبالتعويض بعد ذلك بهذه الصيغة فى المعادلة (18) نحصل على العلاقة بين قيمتى الطاقة على ناحيتى الجبهة

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)$$

و

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2).$$

ندرس الغاز المثالى الذى يكون له

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

أى أن

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{19}$$

وبالاستعانة بالعلاقة (19) نصل بعد بعض الاختصارات البسيطة إلى ما يسمى بمعادلة أديابات جيوجونيو

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1} \tag{20}$$

أو

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \rho_2 - (\gamma - 1) \rho_1}{(\gamma + 1) \rho_1 - (\gamma - 1) \rho_2}. \tag{21}$$

ويمكن من هذه العلاقة تعيين أحد المقادير p_1, ρ_1, p_2, ρ_2 إذا علمت المقادير الثلاثة الأخرى .

والموجة الصادمة تتحرك دائما بالنسبة إلى الغاز من المناطق ذات الضغط الأكبر إلى المناطق ذات الضغط الأقل : $p_2 > p_1$ (نظرية تسمبلن) . ومن هنا ينتج أن كثافة الغاز وراء الجبهة أكبر من كثافته أمامها .

والعلاقة (20) تعبر عن العلاقة بين ρ_2 , p_2 لقيمتى ρ_1 , p_1 المعطاتين . والدالة $\rho_2 = \rho_2(p_2)$ لقيمتى ρ_1 , p_1 المعطاتين هى عبارة عن دالة متزايدة باطراد تؤول إلى نهاية محدودة عند $p_2/p_1 \to \infty$ (الموجة الصادمة ذات السعة الكبيرة) :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \tag{22}$$

وهذه العلاقة توضح أكبر قفزة تحدث للكثافة (التكثيف) والتى يمكن أن توجد على جبهة الموجة الصادمة . وللغاز الثنائى الذرات $\gamma = 7/5$ والتكثيف الأقصى (الأعظم) يساوى 6 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

وبالاستعانة بالمتساويات (20) . (17) ,(16′) بفرض $p_1 = 0$ نعين :

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

وإذا كانت الموجة الصادمة تتحرك فى غاز ساكن $(v_1 = 0)$ فإن سرعة انتشار الموجة الصادمة تساوى

$$U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

أى أن هذه السرعة تتزايد متناسبة مع الجذر التربيعى لـ p_2 .

ندرس أبسط مسألة لنظرية الموجات الصادمة تسمح بحل تحليلى . فى أنبوبة اسطوانية $x > 0$ لانهائية من أحد طرفيها ومقفولة بكباس عند الطرف الآخر $(x = 0)$ يوجد غاز ساكن ثابت الكثافة ρ_1 تحت ضغط ثابت p_1 . وفى اللحظة الابتدائية $t = 0$ يبدأ الكباس فى التحرك بسرعة ثابتة v فى الاتجاه الموجب للمحور x . وتنشأ أمام الكباس موجة صادمة تنطبق فى اللحظة الابتدائية على الكباس وبعد ذلك تبتعد عنه بسرعة $U > v$. وبين الكباس وجبهة الموجة الصادمة تنشأ المنطقة 2 حيث يتحرك فيها الغاز بسرعة تساوى سرعة الكباس . وأمام الجبهة (المنطقة 1) يوجد الغاز فى حالة اللااضطراب (اللاإثارة) :

$$\rho = \rho_1, \; p = p_1 \;\; (v = 0).$$

وبالاستعانة بالشروط على الجبهة (18) . (17) ,(16)يسهل تعيين سرعة الجبهة وكذلك مقدار القفزة فى الكثافة والضغط .

نستعين بالمقادير اللابعدية التالية :

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \qquad (23)$$

حيث $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ سرعة الصوت أمام الجبهة (فى المنطقة غير المضطربة 1) .

وعندئذ تكتب معادلات الحفظ فى الصورة التالية :

$$\tilde{U}=\frac{\tilde{v}}{1-\omega} \quad \text{أو} \quad \omega\tilde{U}=\tilde{U}-\tilde{v} \tag{24}$$

$$\tilde{p}=1+\gamma\frac{\tilde{v}^2}{1-\omega} \quad \text{أو} \quad \tilde{p}=1+\gamma\tilde{U}\tilde{v} \tag{25}$$

$$\tilde{p}\omega=1+(\gamma-1)\left(\tilde{U}\tilde{v}-\frac{1}{2}\tilde{v}^2\right). \tag{26}$$

وبحذف $\tilde{U}$ ، $\tilde{p}$ من هذه المعادلات نحصل على معادلة تربيعية لتعيين ω :

$$2\omega^2-\omega[4+(\gamma+1)\tilde{v}^2]+[2+(\gamma-1)\tilde{v}^2]=0. \tag{27}$$

وحيث أنه واضح من معنى ω أنها أصغر من الواحد الصحيح$(\rho_2>\rho_1)$;$\omega<1$; $(\rho_2>\rho_1)$ $\omega<1$
نختار الجذر الأصغر للمعادلة التربيعية

$$\omega_2=1+\frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2-\tilde{v}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{28}$$

ومن المعادلتين (28) ، (24) نجد أن

$$\tilde{U}=\frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}+\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}, \tag{29}$$

$$\tilde{p}=1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2+\gamma\tilde{v}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{30}$$

وبالعودة إلى المقادير الأصلية نحصل على :

$$\rho_2=\rho_1\frac{1+\frac{\gamma+1}{4}\cdot\frac{v^2}{c_1^2}+\frac{v}{c_1}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}\cdot v^2}}{1+\frac{(\gamma-1)v^2}{2c_1^2}}. \tag{31}$$

$$U=\frac{\gamma+1}{4}v+c_1\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}, \tag{32}$$

$$p_2=p_1\cdot\left\{1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\frac{v^2}{c_1^2}+\frac{\gamma v}{c_1}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}. \tag{33}$$

وحيث إن سرعة الموجة الصادمة ثابتة فسنحصل لموضع الجبهة فى اللحظة على :

$$x=\alpha(t)=\left\{\frac{(\gamma+1)}{4}v+c_1\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}t. \tag{34}$$

وفى الحالة النهائية $v/c_1 \gg 1$ (الموجة الصادمة ذات الشدة الكبيرة) نعين من العلاقات (33)—(31) العلاقات النهائية

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad U = \frac{\gamma+1}{2} v; \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \cdot \frac{v^2}{c_1^2},$$

التى حصلنا عليها فيما سبق .

وإذا كان $v/c_1 \ll 1$ (الموجة ذات الشدة الصغيرة) فإنه يمكن إهمال الحدود v^2/c_1^2 :

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \frac{v}{c_1}\right),$$

$$U = c_1 + \frac{(\gamma+1)}{4} v,$$

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma v}{c_1}\right)$$

٣ـ الانفصالات الضعيفة . درسنا أعلاه حركة الموجة الصادمة التى يحدث على جبهتها للكميات ρ, p, v وغيرها قفزات . ومثل هذه الانفصالات تسمى انفصالات قوية .

ومن الممكن حدوث حركات ينشأ خلالها عند بعض السطوح قفزات للمشتقات الأولى للكميات ρ, p, v وغيرها فى حين تظل الكميات نفسها متصلة . ومثل هذه الانفصالات تسمى بالانفصالات الضعيفة .

وفى بند ٢ ، فقرة ١٠ درسنا حركة الانفصالات من هذا النوع وأثبتنا أن هذه الانفصالات تنتشر على امتداد المميزات . وعند ذلك فقد كنا ننطلق من معادلة الصوتيات . إلا أن النتيجة المماثلة تكون أيضا صحيحة للمسائل اللاخطية لديناميكا الغازات .

وليس من الصعب التحقق من أن سطح الانفصال الضعيف ينتشر بالنسبة للغاز بسرعة تساوى سرعة الصوت المحلية . بالفعل نفصل جوارا (neighbourhood) صغيرا لسطح الانفصال الضعيف ونأخذ القيم المتوسطة للكميات الهيدروديناميكية فى هذا الجوار . ومن الواضح أنه يمكن دراسة الانفصال الضعيف على القيم المتوسطة بوصفه اضطرابا صغيرا يحقق معادلة الصوتيات ويجب أن ينتشر بسرعة الصوت المحلية .

وكمثال ندرس انسياب الغاز فى مكان مفرغ من الهواء (موجة الخلخلة) . نفرض أنه فى اللحظة الابتدائية $t=0$ يسكن الغاز الذى يملأ نصف الفراغ $x>0$ ويكون له قيمتان ثابتتان للكثافة ρ والضغط p_0 فى كل المنطقة $x>0$. وعند $t=0$ يرفع الضغط الخارجى المؤثر على المستوى $x=0$ ويبدأ الغاز فى الحركة . وعند ذلك ينشأ انفصال ضعيف (موجة خلخلة) ينتشر بسرعة الصوت c_0 فى الاتجاه الموجب للمحور x . وعلى الجبهة الأمامية للغاز $x=x_1(t)$ عند $t=0$ نحصل على انفصال فى الكثافة والضغط . غير أن هذا الانفصال يتلاشى فورا بعد بداية الحركة .

بالفعل من شروط اتصال دفق المادة وكمية الحركة عندما $x=x_1(t)$

$$0=\rho_1^-(v_1-v_1^-)=\rho_1^+(v_1-v_1^+),$$
$$p_1^-+\rho_1^-(v_1-v_1^-)^2=p_1^++\rho_1^+(v_1-v_1^+)^2,$$

حيث ρ_1^-, p_1^-, v_1^- هى القيم من اليسار عند النقطة $x_1(t)$ ، ρ_1^+, p_1^+, v_1^+ هى القيم من اليمين عند النقطة $x_1(t)$. نحصل على :

$$p_1^+=0 \quad ، \quad \rho_1^+=0,$$

لأن

$$\rho_1^-=p_1^-=v_1^-=0.$$

وللعملية الأدياباتية تكون معادلة الحالة للغاز المثالى على الصورة

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \tag{35}$$

وحل المسألة نبحث عنه فى الصورة

$$\rho=\rho(\xi); \quad p=p(\xi); \quad v=v(\xi),$$

حيث $\xi=x/t$.

وبحساب المشتقات

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{t}\xi\frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{df}{d\xi},$$

حيث $p = f$ و $v = f$ و $\rho = f$. وبالتعويض عن النتائج هذه في المعادلتين (1) ، (2) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} (v-\xi)\frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho\frac{dv}{d\xi}, \\ (v-\xi)\rho\frac{dv}{d\xi} &= \frac{dp}{d\xi}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

بضرب المعادلة الأولى في $(v-\xi)$ وجمع الناتج على المعادلة الثانية ينتج :

$$(v-\xi)^2\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi}$$

أو

$$\frac{dp}{d\rho} = (v-\xi)^2.$$

ومن هنا نحصل على :

$$v-\xi = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \pm c,$$

حيث c سرعة الصوت في العملية الأديباتية .

وحيث إننا ندرس حركة الانفصال الضعيف في الاتجاه الموجب للمحور x ، يجب أن نختار في العلاقة السابقة الإشارة السالبة أي أن

$$v-\xi = -c. \qquad (37)$$

بالتعويض بهذا الحل في المعادلة (36) نحصل على :

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c}{\rho} \qquad (38)$$

أو (وهو نفس الشيء) :

$$\frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho c}.$$

وبالاستعانة بمعادلة الحالة (35) نجد أن

$$c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$$

وبعد تكامل المعادلة (38) نحصل على

$$v=\frac{2}{\gamma-1}\cdot c_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}-1\right]. \quad (39)$$

ومن العلاقة الأخيرة يمكن التعبير عن ρ بدلالة v :

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (40)$$

وهنا

$$c_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$$

ترمز لسرعة الصوت عندما $v=0$ (فى الغاز الساكن) . ويمكن أيضا كتابة العلاقة (39) فى الصورة التالية :

$$v=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_0). \quad (41)$$

بالتعويض بالصيغة (40) الناتجة للكثافة ρ فى معادلة الحالة (35) نجد أن :

$$p=p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (42)$$

ومن المعادلتين (41) ، (37) نحصل على العلاقة

$$v=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}-c_0\right), \quad (43)$$

التى تعين ارتباط v بالمتغيرين x , t . وبالتعويض بالصيغة (43) الناتجة للسرعة v فى العلاقتين (42) , (40) نحصل على ارتباط p ، ρ بالمتغيرين t ، x فى صورة صريحة . وكل الكميات يتضح أنها تعتمد على x/t . واذا تم قياس المسافات فى وحدات تتناسب مع t فلن تتغير صورة الحركة . ومثل هذه الحركة تسمى اتوماتية الطراز (automodel).

نعين سرعة حركة الجبهة الأمامية $v_1(t)$. بفرض $p=0$ فى المتساوية (42) سنحصل على :

$$v_1=-\frac{2}{\gamma-1}c_0. \quad (44)$$

ومن هنا ينتج أن سرعة انسياب الغاز إلى الفراغ محدودة . وللغازات الثنائية الذرات $\gamma = 7/5$ و

$$v_1 = -5c_0.$$

والصيغة (44) لسرعة الجبهة اليسرى $x = x_1(t)$ يمكن الحصول عليها أيضا من معادلة التوازن فى المادة

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho\, dx = \rho_0 x_2 = \rho_0 c_0 t. \qquad (45)$$

وبالاستعانة بالمتغير $\xi = x/t$ نحصل على

$$\int_{v_1}^{c_0} \rho\, d\xi = \rho_0 c_0.$$

وبالتعويض بعد ذلك بصيغة ρ من (40) وفرض

$$1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{\xi - c_0}{c_0} = \lambda,$$

نحصل على :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}}\, d\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \qquad (46)$$

حيث

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

وبعد حساب التكامل (46) نحصل على

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

أى أن

$$\lambda_1 = 0,$$

ومن هنا ينتج أن

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

وهكذا حلت مسألة انسياب الغاز إلى المكان المفرغ .

ولقد اكتفينا فيا سبق بدراسة أبسط مسائل ديناميكا الغازات فقط . وللتعرف بشكل أكثر تفصيلا على الموضوعات الملموسة هنا على الطالب أن يرجع إلى المراجع المتخصصة .

ملحق ٥ ـ ديناميكا امتصاص الغازات

١ ـ المعادلات التى تصف عملية امتصاص الغازات . ندرس مسألة امتصاص الغاز (sorption) . نفرض أن خليطا من الغاز والهواء يمر فى أنبوبة (سنعتبر محورها هو المحور الإحداثى x) مملوءة بمادة ماصة . نرمز بالرمز $a(x, t)$ لكمية الغاز الممتص فى وحدة حجوم المادة الماصة وبالرمز $u(x, t)$ لتركيز الغاز الموجود فى مسام المادة الماصة فى الطبقة x .

نكتب معادلة توازن المادة بافتراض أن سرعة الغاز v كبيرة بشكل كاف وعملية الانتشار (diffusion) لا تلعب أى دور فى انتقال الغاز . ندرس طبقة من المادة الماصة من x_1 إلى x_2 خلال الفترة الزمنية من t_1 إلى t_2 . ومن الواضح أنه يمكن أن نكتب لهذه الطبقة معادلة توازن المادة

$$[vu|_{x_1} - vu|_{x_2}]\, S\,\Delta t = [(a+u)|_{t_2} - (a+u)|_{t_1}]\, S\,\Delta x, \qquad (1)$$

التى تتحول بعد اختصار $\Delta x\,\Delta t$ والانتقال إلى النهاية عندما $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$ إلى الصورة

$$-v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(a+u). \qquad (2)$$

والطرف الأيسر لهذه المعادلة هو عبارة عن كمية الغاز المتراكمة نتيجة للانتقال محسوبة فى وحدة الطول والزمن . والطرف الأيمن هو كمية الغاز المستهلك فى رفع تركيز الغاز الممتص والغاز الموجود فى المسام . وإلى معادلة التوازن هذه يجب إضافة معادلة كينتيكا الامتصاص

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - y), \qquad (3)$$

حيث β هو ما يسمى بالمعامل الكينتيكى ، y تركيز الغاز الموجود فى « اتزان » مع

كمية الغاز الممتصة . والكميتان y ، a ترتبطان ببعضهما بالمعادلة

$$a = f(y), \qquad (4)$$

التى تعتبر مميزة للمادة الممتصة . والمنحنى $a = f(y)$ يسمى ايزوثرم الامتصاص . وإذا كان

$$f(y) = \frac{yu_0}{\gamma(u_0 + py)},$$

فإن الايزوثرم يسمى بايزوثرم لينجميور . وأبسط صورة للدالة f تناظر ما يسمى بايزوثرم هنرى الذى يكون صحيحا فى منطقة التركيزات الصغيرة

$$a = \frac{1}{\gamma} y, \qquad (5)$$

حيث $1/\gamma$ معامل هنرى . وفى هذه الحالة نصل إلى المسألة التالية :

عين الدالتين $a(x,t)$ ، $u(x,t)$ من المعادلتين

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a) \qquad (6)$$

بالشروط الإضافية

$$\left.\begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$u(0, t) = u_0, \qquad (8)$$

حيث u_0 تركيز الغاز عند الدخول (فى الأنبوبة) .

وبإهمال المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ التى تعبر عن استهلاك الغاز لرفع التركيز الحر فى مسام المادة الماصة بالمقارنة مع المشتقة $\frac{\partial a}{\partial t}$ التى تعبر عن استهلاك الغاز على زيادة كمية الغاز الممتصة نحصل على* :

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t}, \qquad (2')$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a), \qquad (6)$$

$$a(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u_0.$$

* لمجموعة المعادلتين (6) ، (2′) يكفى شرط ابتدائى واحد فقط لأن المحور $t = 0$ فى هذه الحالة يصبح مميزة . انظر تفصيل ذلك فى هامش الصفحة ١٩٧ .

نحذف الدالة $a(x,t)$ ، بتفاضل المعادلة بالنسبة إلى t والاستعانة بالمعادلة الثانية ، نحصل على :

$$-\nu u_{xt}=\beta u_t-\beta\gamma a_t=\beta u_t+\beta\nu\gamma u_x$$

أو

$$u_{xt}+\frac{\beta}{\nu}u_t+\beta\gamma u_x=0.$$

نعين الشرط الابتدائى للدالة u بوضع $t=0$ فى المعادلة الأولى

$$-\nu u_x(x,0)=\beta u(x,0),\quad u(0,0)=u_0,$$

ومن هنا نجد أن

$$u(x,0)=u_0e^{-\frac{\beta}{\nu}x}.$$

ومسألة تعيين الدالة $u(x,t)$ آلت إلى تكامل المعادلة

$$u_{xt}+\frac{\beta}{\nu}u_t+\beta\gamma u_x=0 \qquad (9)$$

بالشروط الإضافية

$$u(x,0)=u_0e^{-\frac{\beta}{\nu}x}, \qquad (10)$$

$$u(0,t)=u_0. \qquad (8)$$

ومميزتا هذه المعادلة هما المنحنيان

$$x=\text{const},\quad t=\text{const}.$$

والشروط الإضافية فى هذه المسألة هى عبارة عن قيم الدالة المطلوب تعيينها$u(x,t)$ على المميزات . وبالمثل تصاغ المسألة للدالة $a(x,t)$:

$$a_{xt}+\frac{\beta}{\nu}a_t+\beta\gamma a_x=0, \qquad (11)$$

$$a(x,0)=0, \qquad (7)$$

$$a(0,t)=\frac{u_0}{\gamma}(1-e^{-\beta\nu\gamma t}). \qquad (12)$$

وينبغى الإشارة إلى أن مثل هذه المسألة تقابلنا عند دراسة عديد من الموضوعات الأخرى (على سبيل المثال عملية التجفيف بدفق هوائى أو تسخين أنبوبة بدفق مائى .. والخ*) .

وحل المعادلة (9) يمكن الحصول عليه فى صورة صريحة بالطريقة المشروحة فى بند ٥ ، ويعطى بالعلاقة

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1}\left[e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau})\, d\tau\right], \quad (13)$$

---

* بالانتقال إلى المعادلة (′2) أهملنا الحد u_t . غير أنه ليس من الصعب أن نوضح أننا سنصل إلى نفس المعادلة إذا أدخلنا المتغيرات الجديدة

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \quad t = \tau + \frac{\xi}{v}, \quad \xi = x, \quad x = \xi$$

(شكل ٣٢) حيث يبدأ حساب الزمن عند النقطة x ابتداء من اللحظة $t_0 = x/v$ وهى لحظة وصول الخليط الغازى الهوائى إلى هذه النقطة . بالفعل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

وتأخذ المعادلة (2) الصورة

$$-v\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \quad (2'')$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \quad (6)$$

والشروط الابتدائية (7) والمعادلتان (6) , (2) تعطى :

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_\xi(x, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

شكل ٣٢

وفى المنطقة بين المستقيم $t = 0$ والمحور ξ نحصل على مسألة تعيين الدالة u بالشروط الابتدائية (′7) (مسألة كوشى) . ومن الواضح أنه فى هذه المنطقة تكون $u(x, t) \equiv 0$ (وكذلك $a \equiv 0$) . ومن المعادلتين (6) . (′2) يتضح أنه عندما $\tau = 0$ يحدث للدالة $u(x, t)$ انفصال فى حين تظل الدالة $a(x, t)$ متصلة . وبذلك فعند $\tau = 0$ تعين الدالة u كما أوضحنا فيما سبق من المعادلة (′2) عندما $a(x, 0) = 0$. وبتعيين القيم $a(0, t)$. $u(x, 0)$ كما فعلنا ذلك فى الصفحة السابقة (انظر العلاقتين (12) . (10)) نحصل للدالتين $a(x, t)$. $u(x, t)$ على مسألتين بالمعطيات على المميزات .

حيث $x_1=\frac{\beta x}{\nu}$, $t_1=\frac{\beta t}{\gamma}$ متغيران بلا أبعاد (dimensionless) ، I_0 دالة بيسل من النوع الأول من الرتبة الصفرية فى المتغير التخيلى .

وبالاستعانة بالعلاقات التقاربية (asymptotical) للدالة I_0 يسهل الحصول على الصيغة التقاربية للحل لقيم المتغيرات الكبيرة .

٢ ـ الحل التقاربى (asymptotical solution) . درسنا أعلاه عملية امتصاص الغاز الخاضع لايزوثرم هنرى للامتصاص الذى يربط بين كمية المادة الممتصة a والتركيز الموازن (balanced) y بارتباط خطى

$$a=\frac{1}{\nu}y.$$

ندرس ايزوثرم الامتصاص فى الصورة العامة :

$$a=f(y).$$

وإذا أدخلنا متغيرات بلا أبعاد :

$$x_1=\frac{x\beta}{\nu},\quad t_1=\frac{t\beta}{\gamma},\quad \bar{u}=\frac{u}{u_0},\quad z=\frac{y}{u_0},\quad v=\frac{a}{u_0\gamma},$$

فإن المجموعة (8) ,(7) ,(6) ,(2′) تأخذ الصورة

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_1}&=-\frac{\partial v}{\partial t_1},\\ \frac{\partial v}{\partial t_1}&=(\bar{u}-z),\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

$$v=f_1(z)=\frac{1}{u_0\gamma}f(zu_0)\tag{15}$$

بالشروط الإضافية

$$\bar{u}(0,t_1)=1,\tag{16}$$

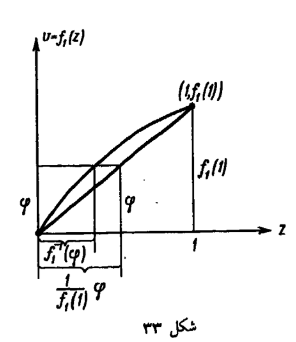
$$v(x_1,0)=0.\tag{17}$$

وسنهتم بالسلوك التقاربى للدوال المعبرة عن حل المجموعة (14) .

بالنسبة إلى الدالة $f_1(z)$ سنفترض ما يلى :

(١) $f_1(z)$ دالة متزايدة و $f_1(0)=0$ ؛

(٢) $f_1(z)$ لها مشتقة متصلة لجميع قيم z حيث $0\leqslant z\leqslant 1$ ،



شكل ٣٣

(٣) الشعاع الخارج من نقطة الأصل إلى النقطة $(1, f_1(1))$ يقع أسفل المنحنى $f_1(z)$ فى الفترة $0 \leqslant z \leqslant 1$ (شكل ٣٣) وهو ما يتحقق كحالة خاصة للايزوثرم المحدب .

وبالرمز للدالة العكسية

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

سنبحث عن الحل التقاربى للمسألة المصاغة فى صورة موجة منتشرة*

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \psi(\xi), \\ \tilde{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned} \quad \xi = x - \sigma t, \tag{18}$$

حيث σ سرعة انتشار الموجة وينبغى تعيينها .

وهذا يعنى أنه على المسافات الكبيرة (عند $x \to \infty$) أو بعد فترة زمنية طويلة ($t \to \infty$) يكون

$$v(x, t) = \tilde{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \tilde{u}(x, t) = \tilde{u} = \psi(x - \sigma t).$$

والتركيزان v ، $\tilde{u}$ يجب عند $x = \infty$ أو $t = \infty$ أن يحققا شرط الاتزان

$$v = f_1(\tilde{u}) \quad \text{أو} \quad \tilde{u} = F(v)$$

ومن الشرط (16) ينتج عندئذ أن

$$\tilde{u}\,\Big|_{\substack{x=0 \\ t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v\,\Big|_{\substack{x=0 \\ t=\infty}} = f_1(1). \tag{19}$$

ومن الشرط (17) ينتج أن

$$v\,\Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \tilde{u}\,\Big|_{\substack{x=\infty \\ t=0}} = F(0) = 0. \tag{20}$$

---

* لتسهيل الكتابة سنكتب x, t بدلا من x_1, t_1 .

والشرط (19) يعنى أنه عندما $(\xi \to -\infty)$ $t \to \infty$ يجب أن يحدث التشبع فى كل مكان .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل فى المعادلة (14) نحصل على :

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0, \tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \tag{22}$$

ومن (21) ، (20) نستنتج أن

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \tag{23}$$

ومن المعادلتين (19) ينتج عندئذ أن

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}\bigg|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \tag{24}$$

أو فى الكميات البعدية (dimensional)

$$\sigma = \gamma\frac{u_0}{a_0}, \quad a_0 = f(u_0). \tag{24'}$$

ومن (22) و (23) نحصل على

$$-\sigma\frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \tag{25}$$

وبعد التكامل سنحصل على

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \tag{26}$$

حيث $\omega(\varphi)$ تكامل ما للطرف الأيسر ، ξ_0 ثابت التكامل . ومن هنا فالدالة المطلوب تعيينها $\varphi(\xi)$ تعين بدقة حتى ثابت مجهول ξ_0 :

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \tag{27}$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \tag{28}$$

نوضح هل يمكن تعيين الدالة ω^{-1} وهل تحقق الدالتان ψ ، φ الشروط المطروحة عند $\xi \to -\infty$ ، $\xi \to \infty$. نبين أن المشتقة

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma\frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \tag{29}$$

أى

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

هى دالة متناقصة باطراد فى الدالة φ . بالفعل ، المقام فى (29) يساوى

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

الحد الأول هو الإحداثى الأفقى المناظر للإحداثى الرأسى φ للنقطة الواقعة على الشعاع الخارج من نقطة الأصل إلى النقطة $(1, f_1(1))$ (شكل ٣٣) . وحيث إننا اصطلحنا على أن المنحنى $\varphi = f_1(z)$ يقع أعلى هذا الشعاع فإن

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant f_1(1))$$

وبالتالى فإن

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

وعلاوة على ذلك

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0$$

عندما $\varphi = 0$ و $\varphi = f_1(1)$. ومن هنا ينتج أن

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty \quad \text{عند} \quad \varphi = 0 \text{ ،}$$
$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty \quad \text{عند} \quad \varphi = f_1(1) .$$

وللدالة العكسية نحصل على :

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1) \quad \text{عندما} \quad \xi = -\infty \text{ ،}$$
$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0 \quad \text{عندما} \quad \xi = \infty .$$

وبعد ذلك فوفقا للمتساوية (29) نحصل على :

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1 \quad \text{عند} \quad \xi = -\infty \text{ ،}$$
$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0 \quad \text{عند} \quad \xi = \infty .$$

وهكذا فإن الشرطين (20) , (19) يتحققان ، وبذلك أثبتنا أن مجموعة المعادلات لها حل فى صورة موجة منتشرة تحتوى على ثابت غير محدد ξ_0 .

ولتعيين ξ_0 تكامل المعادلة الأولى بالنسبة إلى t_1 بالحدود من 0 إلى t_0 وبالنسبة إلى x بالحدود من 0 إلى x_0 :

$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau)\, d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\, d\tau\right] + \\ + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0)\, dx - \int_0^{x_0} v(x, 0)\, dx\right] = 0. \tag{30}$$

والمتساوية الناتجة تعبر عن قانون حفظ المادة . وبالانتقال إلى النهاية عندما $x_0 \to \infty$ والاستعانة بالشروط الابتدائية للدالتين v , $\bar{u}$ نحصل على :

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\, dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\, d\tau = t_0.$$

نفرض أنه لقيم t الكبيرة يقترب حل مسألتنا إلى الدالتين $\tilde{v}$, $\tilde{u}$ المعينتين أعلاه كموجتين منتشرتين .

وإذا عينا ξ_0 من الشرط

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\, dx - t_0 \to 0 \qquad (t_0 \to \infty), \tag{31}$$

فإنها ستكون هى قيمة ξ_0 تلك التى تناظر الدالتين $\tilde{v}(x,t)$, $\tilde{u}(x,t)$.

نحول تكاملنا

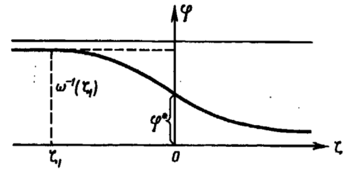
$$\int_0^{\infty} \tilde{v}(x, t_0)\, dx = \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0)\, dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0)\, dx = \\ = \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi)\, d\xi = \int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta \qquad \begin{pmatrix} \zeta = x - \sigma t_0 - \xi_0, \\ \zeta_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{pmatrix}.$$

نرمز بالرمز φ^* إلى قيمة $\omega^{-1}(\zeta)$ عند $\zeta = 0$:

$$\omega^{-1}(0) = \varphi^*.$$

وليس من الصعب أن نرى أنه إذا كانت $\varphi=\omega^{-1}(\zeta)$ هى الدالة العكسية للدالة $\zeta=\omega(\varphi)$ (شكل ٣٤) فإن

$$\int_{\zeta_1}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta=\int_{\zeta_1}^{0}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta+\int_{0}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta=$$
$$=\left[-\zeta_1\omega^{-1}(\zeta_1)+\int_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\zeta_1)}\omega(\varphi)\,d\varphi+\int_{0}^{\varphi^*}\omega(\varphi)\,d\varphi\right]. \quad (32)$$



شكل ٣٤

ومن هنا ينتج أنه بدلا من المتساوية النهائية (31) يمكن كتابة

$$\int_{-\sigma t_0-\xi_0}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta-t_0=$$
$$=\left\{(\sigma t_0+\xi_0)\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)+\int_{0}^{\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)}\omega(\varphi)\,d\varphi\right\}-t_0\to 0 \quad (t_0\to\infty). \quad (32')$$

وبالانتقال إلى النهاية عند $t_0\to\infty$ نحصل عندئذ على :

$$\sigma\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)\to\sigma\varphi(-\infty)=\sigma f_1(1)=1. \qquad (32'')$$

ولحساب نهاية الصيغة

$$\sigma t_0\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)-t_0,$$

نستعين بالمعادلة (25) . بفك $f_1^{-1}(\varphi)=F(\varphi)$ فى متسلسلة بجوار النقطة $\varphi_0=f_1(1)$ نحصل على :

$$\sigma\varphi-F(\varphi)=\sigma(\varphi-\varphi_0)+1-F(\varphi)=$$
$$=\sigma(\varphi-\varphi_0)-[F(\varphi)-F(\varphi_0)]=[\sigma-F'(\varphi_0)](\varphi-\varphi_0)+\ldots,$$

ومن هنا ينتج أن

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \dots} = d\xi, \qquad (33)$$

حيث رمزنا بالنقط إلى الحدود من قوى أعلى بالنسبة إلى $(\varphi - \varphi_0)$.

ومن الشرط (٣) للدالة f_1 ينتج أن

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

ومن المعادلة (33) نعين درجة تزايد φ عندما $\xi \to -\infty$:

$$\varphi = Ae^{k\xi} + \varphi_0, \qquad (34)$$

حيث $k > 0$ ، A ثابتان ما .

وينتج من (34) أن

$$\lim_{t_0 \to \infty} t_0 [\sigma\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \to \infty} t_0 A\sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0. \qquad (32''')$$

وبالانتقال إلى النهاية فى العلاقة (32′) عندما $t_0 \to \infty$ مع أخذ العلاقتين (32″) و(32‴) فى عين الاعتبار نحصل على :

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi. \qquad (35)$$

وبذلك فالمقاطع الجانبية للموجة $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ تكون قد حددت تماما .

وتشكل حالة ايزوثرم لينجميور أهمية خاصة . نعين الحل التقاربى لعملية الامتصاص الخاضعة لايزوثرم لينجميور .

المعادلة (25) تأخذ الصورة

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \dfrac{\varphi}{1 - p\varphi}} = d\xi, \qquad (36)$$

حيث $\sigma = \frac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ سرعة الموجة . ومن (36) نجد أن :

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

حيث

$$\omega(\varphi) = \sigma \int \frac{(1-p\varphi)\,d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1-p\varphi)} + A =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - 1 - p\sigma\varphi) - \ln\varphi\right] + A.$$

من الواضح أنه عندما تتغير φ من الصفر إلى $f_1(1)$ فإن $\omega(\varphi)$ تتغير من $+\infty$ إلى $-\infty$. نختار A بحيث يكون

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

أى بحيث يكون

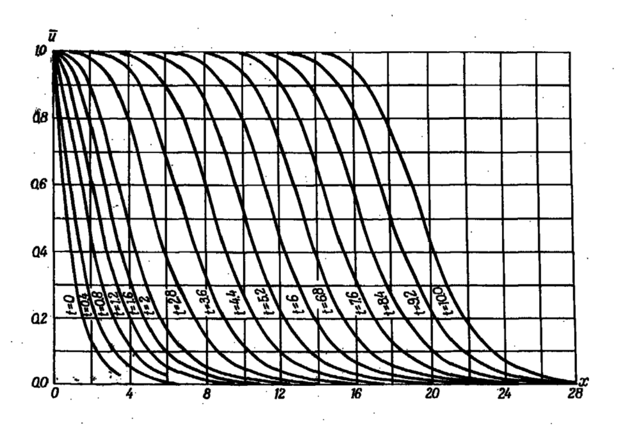
$$\omega(\varphi^*) = 0 \quad \text{عندما} \quad \varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+p}$$

وعند هذا الشرط يكون

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{2}p\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+p}\right)\right]$$

و

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln 2(1-\sigma\varphi) - \ln 2(1+p)\varphi\right].$$



شكل ٣٥

وقيمة ξ_0 تتحدد بالعلاقة

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int\limits_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi = \ln 2 - 1$$

ولا تعتمد على $p = u_0/y$ أى على التركيز المعطى .

والحل التقاربى المطلوب يكون على الصورة :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \tilde{u}(x, t) &= \sigma\omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \tag{37}$$

حيث $\omega^{-1}(\xi)$ الدالة العكسية للدالة $\omega(\varphi)$.

وفى شكل ٣٥ بينت نتائج عملية التكامل العددى للمعادلات (14) لايزوثرم لينجميور بطريقة الفروق المحدودة . وهذه المنحنيات معطاة للقيم $0 < t \leqslant t_1 = 10$ وعند $t = t_1$ تنطبق نتائج التكامل العددى على الحل التقاربى بدقة حتى 1% . وللقيم $t > t_1$ يمكن الاستعانة بالعلاقات التقاربية .

ملحق ٦ ـ التشابهات الفيزيائية

عند دراسة الظواهر فى مختلف مجالات علم الفيزياء كثيرا ما نكتشف ملامح مشتركة فى هذه الظواهر . ويؤدى ذلك إلى الحصول عند الصياغة الرياضية للمسائل على معادلات واحدة تصف الظواهر الفيزيائية المختلفة . وأبسط مثال على هذه المعادلات يمكن أن تكون المعادلة

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0,$$

التى تصف عمليات ذبذبية مختلفة للمجموعات البسيطة : البندول الرياضى ، ذبذبة ثقل تحت تأثير قوة مرونة الزنبرك ، الذبذبات الكهربائية فى دائرة بسيطة بملف حث ذاتى وسعة .. الخ . وعمومية المعادلات للعمليات الفيزيائية المختلفة تكفل على أساس دراسة خواص إحدى الظواهر الخروج باستنتاجات عن خواص ظاهرة أخرى قد تكون قد درست أقل من الأولى . فعلى سبيل المثال يمكن تسهيل

دراسة مختلف الظواهر الصوتية إلى حد كبير بالدراسة المسبقة للدوائر الكهربائية المناظرة .

وانتشار الذبذبات الكهربائية فى المجموعات ذات الثوابت الموزعة يوصف كما هو معلوم بالمعادلات التلغرافية

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t} + GV, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I}{\partial t} + RI, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

حيث C, G, L, R السعة والتسرب والحث الذاتى والمقاومة الموزعة للمجموعة . وإذا أمكن إهمال المقاومة وتسرب التيار نحصل للدالتين I ، V على معادلتين موجيتين عاديتين :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0,$$

والمعادلتان (1) تأخذ الصورة

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

وعند حل مسألة انتشار الصوت فى اتجاه ما وعلى سبيل المثال عند دراسة حركة الهواء فى الأنابيب نصل إلى المعادلتين

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

حيث v سرعة الجسيمات المتذبذبة ، ρ الكثافة ، p الضغط ، $\tau = p_0\gamma$ معامل مرونة الهواء .

ويكفل التشابه بين المعادلتين (3) , (2) توضيح التناظر بين الكميات الصوتية والكهربائية . ففرق الجهد يناظر الضغط ، والتيار يناظر سرعة حركة الجسيمات ، والكثافة التى تحدد الخواص القصورية للغاز تناظر الحث الذاتى للدائرة الكهربائية ، وسعة الدائرة الكهربائية تناظر $1/\tau$ أى مقلوب معامل المرونة . ونفس هذه التناظرات يمكن تعيينها من صيغ طاقات الوضع والحركة للمجموعتين الكهربائية والصوتية .

وبالعودة إلى المعادلتين (1) يمكننا أن نعين التناظرين الصوتيين للمقاومة والتسرب . ونضطر لأخذ مقدار المقاومة الصوتية فى الاعتبار فى تلك الحالات عندما يكون احتكاك الغاز بجدران الوعاء جوهريا فى دراسة حركة الغاز . وبالتناظر مع المقاومة الكهربائية التى تحدد كنسبة الجهد إلى التيار يمكن تعريف المقاومة الصوتية بوصفها نسبة الضغط إلى التيار فى الوسط والذى يتناسب مع سرعة حركة جسيمات الغاز ، $R_A = p/uv$. وفى تلك الحالات عندما تدرس حركة الغاز فى وسط مسامى نضطر إلى إدخال مقدار مماثل للتسرب فى الدوائر الكهربائية . وهذا المقدار الذى يرمز له بالحرف P يسمى بالمسامية (porosity) ويتحدد بالجزء من حجم المادة الذى يكون مملوءا بالهواء .

والتناظر الميكانيكى للمعادلة التلغرافية هو معادلة الذبذبات الطولية للقضيب التى يمكن كتابتها مثل المعادلتين (2) على الصورة :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial v}{\partial t},$$

حيث T شد القضيب ، v سرعة النقط المتذبذبة ، ρ الكثافة ، k معامل مرونة القضيب .

وبمقارنة هاتين المعادلتين بالمعادلة (2) يمكننا تعيين التناظر بين الكميات الميكانيكية والكهربائية . فبتعيين التناظر بين الجهد الكهربائى وشد الوتر ، والتيار وسرعة حركة الجسيمات ، نحصل على أن مقلوب معامل المرونة يناظر السعة ، والكثافة تناظر الحث الذاتى . وبذلك فإن دراسة المسائل الديناميكية المتشابهة

تؤدى إلى تعيين التناظر بين عدة كميات كهربائية وصوتية وميكانيكية . وهذا التناظر يمكن توضيحه بالجدول التالى :

	المجموعة الكهربائية	المجموعة الصوتية	المجموعة الميكانيكية
المتغيرات	الجهد V التيار I الشحنة e	الضغط p سرعة الجسيمات v الإزاحة u	الشد (القوة) T سرعة الحركة x الإزاحة x
البارامترات	الحث L السعة C المقاومة R	القصور (الكثافة) ρ السعة الصوتية $C_A = 1/\tau$ المقاومة الصوتية R_A	كثافة الكتلة ρ_m الليونة $C_M = 1/k$ المقاومة الميكانيكية R_M

وهذه التصورات المطورة أعلاه تكفل فى كثير من المسائل الصوتية الحصول على بعض المعلومات عن طبيعة الظواهر قبل حل المسائل .

فمثلاً مسائل حركة الهواء فى المسام للموجات التوافقية البسيطة تؤدى إلى المعادلتين

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\operatorname{grad} p,$$
$$\Delta p + i\,\frac{\gamma P\omega}{\rho c^2}(r - i\omega\rho_m)\,p = 0,$$

حيث u السرعة الحجمية للهواء خلال المسام ، p الضغط ، ρ الكثافة ، ρ_m الكثافة الفعالة للهواء فى المسام التى قد تكون أكبر من ρ لأنه فى المسام يمكن أن تتذبذب مع الهواء جسيمات المادة أيضًا . و P المسامية ، ω ، c سرعة وتردد الصوت ، r مقاومة التيار التى تميز هبوط الضغط فى المادة . وبوضع $r = R_A$ ، $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$ ، $\rho_m = L_A$ نحصل على معادلتينا فى الصورة :

$$L_A\frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\operatorname{grad} p,$$
$$C_A L_A\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

وهاتان المعادلتان تشبهان معادلتى انتشار الذبذبات الكهربائية فى الخط (الموصل) . ولذا فبالتناظر مع المقاومة الموجية للخط

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

يمكننا فورًا أن نكتب صيغة المقاومة التى تسمى بالمعاوقة (impedance) المميزة للمادة المسامية :

$$Z = c\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho_{\varpi} - i\,\frac{r}{\omega}}{\gamma P}},$$

باعتبار $G = 0$ عند ذلك . وتشير صيغة المعاوقة المميزة إلى تخميد الموجات المنتشرة فى المادة المسامية .

والتناظر المعين بين الظواهر الكهربائية والصوتية يكفل استبدال دراسة عديد من المسائل الصوتية بدراسة الدوائر الكهربائية المناظرة .

وقد وجدت طريقة التشابه فى الآونة الأخيرة تطبيقًا على نطاق واسع فى الأجهزة الحاسبة الألكترونية للنمذجة . فلحل معادلة تناظر عملية فيزيائية ما تكوّن فى هذه الآلات الدائرة الكهربائية المكافئة .

الباب الثالث

المعادلات من النمط المكافئ

إن المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية من النمط المكافئ تقابلنا أكثر ما يمكن عند دراسة عمليات التوصيل الحرارى والانتشار. وأبسط معادلة من النمط المكافئ وهى

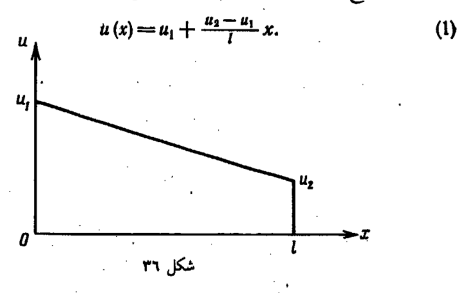
$$u_{xx} - u_y = 0 \qquad (y = a^2 t)$$

تسمى عادة بمعادلة التوصيل الحرارى.

بند ١ ـ المسائل المبسطة التى تؤدى إلى معادلات من النمط المكافئ. صياغة المسائل الحدية

فقرة ١ : المسألة الخطية لانتشار الحرارة. ندرس قضيبًا متجانسًا طوله l معزولاً حراريا من الجوانب ورقيقًا بشكل كاف لكى يمكن فى أية لحظة زمنية اعتبار درجة الحرارة واحدة فى جميع نقط المقطع العرضى. وإذا احتفظنا بطرفى القضيب عند درجتى حرارة ثابتتين u_1 , u_2 فإنه كما نعلم جيدًا يحدث على امتداد القضيب توزيع خطى لدرجة الحرارة (شكل ٣٦)

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \tag{1}$$



شكل ٣٦

وعند ذلك تسرى الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل سخونة . وكمية الحرارة السارية خلال مقطع القضيب الذى مساحته S فى وحدة الزمن تعطى بالقانون التجريبى (الناتج من التجارب المعملية) :

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \qquad (2)$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى الذى يعتمد على مادة القضيب .

ويعتبر مقدار الدفق الحرارى موجبًا إذا كانت الحرارة تسرى فى ناحية تزايد x .

ندرس عملية انتشار الحرارة فى القضيب . وهذه العملية يمكن وصفها بالدالة $u(x, t)$ المعبرة عن درجة الحرارة فى المقطع x فى اللحظة الزمنية t . نعين المعادلة التى يجب أن تحققها الدالة $u(x, t)$. ولهذا الغرض نصيغ القوانين الفيزيائية التى تحدد العمليات المرتبطة بانتشار الحرارة .

١ ــ قانون فورييه . إذا كانت درجة حرارة الجسم غير منتظمة فإنه ينشأ فيه دفوق حرارية متجهة من الأماكن ذات درجات الحرارة الأعلى إلى الأماكن ذات درجات الحرارة الأكثر انخفاضا .

وكمية الحرارة السارية فى المقطع x خلال الفترة الزمنية $(t, t+dt)$تساوى

$$dQ = qS\,dt, \qquad (3)$$

حيث

$$q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

هى كثافة الدفق الحرارى المساوية لكمية الحرارة السارية فى وحدة الزمن خلال مساحة قدرها $1\ cm^2$. وهذا القانون هو عبارة عن تعميم للعلاقة (2) . ويمكن أيضًا إعطاؤه صورة تكاملية :

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt, \qquad (5)$$

حيث Q كمية الحرارة السارية فى الفترة الزمنية (t_1, t_2) خلال المقطع x . وإذا كان القضيب غير متجانس فإن k تكون دالة فى x .

٢ ــ كمية الحرارة التى يجب إكسابها للجسم المتجانس لرفع درجة حرارته بمقدار Δu تساوى

$$Q = cm\,\Delta u = c\rho V\,\Delta u, \qquad (6)$$

حيث c السعة الحرارية النوعية ، m كتلة الجسم ، ρ كثافته ، V الحجم .

وإذا كان تغير درجة الحرارة ذا قيمة مختلفة فى المناطق المختلفة للقضيب أو إذا كان القضيب غير متجانس فإن

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\,\Delta u(x)\,dx. \qquad (7)$$

٣ ــ داخل القضيب يمكن أن تنشأ أو تمتص الحرارة (على سبيل المثال عند مرور تيار أو نتيجة لتفاعلات كيمائية .. الخ) . ويمكن تمييز انبعاث الحرارة بكثافة المصادر الحرارية $F(x,t)$ فى النقطة x فى اللحظة t * . ونتيجة لتأثير هذه المصادر تنبعث على منطقة القضيب $(x, x+dx)$ خلال الفترة الزمنية $(t, t+dt)$ كمية حرارة تساوى

$$dQ = SF(x,t)\,dx\,dt \qquad (8)$$

أو فى الصورة التكاملية

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)\,dx\,dt, \qquad (9)$$

حيث Q كمية الحرارة المنبعثة على جزء القضيب (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) .

وتنتج معادلة التوصيل الحرارى بحساب توازن الحرارة فى جزء ما (x_1, x_2) خلال فترة زمنية ما (t_1, t_2) . وبتطبيق قانون حفظ الطاقة والاستعانة بالعلاقات (5), (7) , (9) يمكن كتابة المتساوية

* اذا كانت الحرارة تنبعث مثلا نتيجة مرور تيار كهربائى قوته I فى القضيب الذى مقاومته فى وحدة الطول تساوى R فإن $F = 0.24\cdot I^2R$.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2}-k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]d\tau+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}c\rho\,[u(\xi,t_2)-u(\xi,t_1)]\,d\xi,\quad (10)$$

التى تعتبر معادلة التوصيل الحرارى فى الصورة التكاملية .

وللحصول على معادلة التوصيل الحرارى فى الصورة التفاضلية نفرض أن الدالة $u(x,t)$ لها المشتقتان المتصلتان u_t , u_{xx} *.

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة نحصل على المتساوية

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2}-k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t+F(x_4,t_4)\,\Delta x\,\Delta t=$$

$$=\{c\rho\,[u(\xi,t_2)-u(\xi,t_1)]\}_{\xi=x_3}\,\Delta x,\quad (11)$$

التى يمكن تحويلها بواسطة نظرية التغيرات المحدودة إلى الصورة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}}\Delta t\,\Delta x+F(x_4,t_4)\,\Delta x\,\Delta t=$$

$$=\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_6}}\Delta x\,\Delta t,\quad (12)$$

حيث x_5, x_4, x_3, t_5, t_4, t_3 نقط وسطية فى الفترتين (x_1,x_2) ، (t_1,t_2) .

ومن هنا نحصل بعد اختصار $\Delta x\,\Delta t$ على :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}}+F(x,t)\Big|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}}=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_6\\ x=x_3}}.\quad (13)$$

وكل هذه التحليلات تتعلق بفترتين اختياريتين (t_1,t_2) , (x_1,x_2). وبالانتقال إلى النهاية عندما $x_1, x_2\to x$ ، $t_1, t_2\to t$ نحصل على المعادلة

---

* باشتراط قابلية الدالة $u(x,t)$ للتفاضل يمكن بوجه عام أن نفقد عدة حلول ممكنة تحقق المعادلة التكاملية ولكنها لا تحقق المعادلة التفاضلية . غير أنه فى حالة معادلة التوصيل الحرارى لن نفقد باشتراط قابلية الحل للتفاضل أية حلول ممكنة لأنه يمكن إثبات أنه إذا كانت الدالة تحقق المعادلة (10) فهى حتما تكون قابلة للتفاضل .

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x, t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (14)$$

التي تسمى معادلة التوصيل الحرارى .

ندرس عدة حالات خاصة .

١ ـ إذا كان القضيب متجانساً فإنه يمكن اعتبار k, c, ρ ثوابت وتكتب المعادلة عادة على الصورة :

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x, t),$$
$$a^2=\frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t)=\frac{F(x, t)}{c\rho},$$

حيث a^2 ثابت يسمى بمعامل توصيل درجة الحرارة . وإذا انعدمت مصادر الحرارة أى كانت $F(x, t)=0$ فإن معادلة التوصيل الحرارى تأخذ الصورة البسيطة التالية :

$$u_t=a^2u_{xx}. \qquad (14')$$

٢ ـ كثافة المصادر الحرارية قد تعتمد على درجة الحرارة . وفى حالة التبادل الحرارى مع الوسط المحيط الذى يخضع لقانون نيوتن تكون كمية الحرارة التى يفقدها القضيب* فى وحدة الأطوال ووحدة الزمن مساوية

$$F_0=h(u-\theta),$$

حيث $\theta(x, t)$ درجة حرارة الوسط المحيط ، h معامل التبادل الحرارى . وبذلك فإن كثافة المصادر الحرارية فى النقطة x فى اللحظة الزمنية t تساوى

$$F=F_1(x, t)-h(u-\theta), \qquad (15)$$

حيث $F_1(x, t)$ هى كثافة المصادر الحرارية الأخرى .

وإذا كان القضيب متجانساً فإن معادلة التوصيل الحرارى مع التبادل الحرارى الجانبى تكون على الصورة التالية :

* حيث إن توزيع درجات الحرارة فى المقطع لا يؤخذ فى الاعتبار فى تقريبنا فإن تأثير المصادر السطحية يكافئ تأثير مصادر الحرارة الحجمية .

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

حيث $a = \frac{h}{c\rho}$ و $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$ دالة معلومة .

٣ ـ المعاملان c ، k يعتبران كقاعدة دالتين تتغيران ببطء بتغير درجة الحرارة . ولذا فإن الافتراض السابق بثبات هذين المعاملين يكون ممكنًا فقط بشرط دراسة فترات غير كبيرة من فترات تغير درجة الحرارة . ودراسة العمليات الحرارية فى فترة كبيرة لتغير درجة الحرارة تؤدى إلى معادلة شبه خطية (quasi-linear) للتوصيل الحرارى تكتب للوسط غير المتجانس فى الصورة :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u, x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = C(u, x)\rho(u, x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

(انظر الملحق ٣) .

فقرة ٢ : معادلة انتشار الغازات (diffusion of gases) . إذا كان الوسط مملوءًا بالغاز بصورة غير منتظمة فإنه تتحقق ظاهرة انتشاره من المكان حيث تركيز الغاز أكبر إلى الأماكن حيث التركيز أقل . وهذه الظاهرة تتحقق أيضًا للمحاليل إذا كان تركيز المادة المذابة فى الحجم غير ثابت .

ندرس عملية الانتشار فى أنبوبة مجوفة أو فى أنبوبة مملوءة بمادة مسامية مع افتراض أن تركيز الغاز (المحلول) فى مقطع الأنبوبة فى أى لحظة زمنية واحد . وعندئذ فإن عملية الانتشار يمكن وصفها بالدالة $u(x,t)$ التى تعبر عن التركيز فى المقطع t فى اللحظة الزمنية x .

ووفقًا لقانون نرنست تكون كتلة الغاز المتسرب خلال المقطع x فى الفترة الزمنية $(t, t+\Delta t)$ مساوية

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,S\,dt = W S\,dt,$$

$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{16}$$

حيث D معامل الانتشار ، S مساحة مقطع الأنبوبة ، $W(x,t)$ كثافة الدفق الانتشارى المساوية لكتلة الغاز المتسرب فى وحدة الزمن خلال وحدة المساحة .

ووفقًا لتعريف التركيز فإن كمية الغاز فى الحجم V تكون مساوية :

$$Q = uV;$$

ومن هنا نحصل على أن تغير كتلة الغاز فى منطقة الأنبوبة (x_1, x_2) عند تغير التركيز بمقدار Δu يساوى :

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) \Delta u \cdot S \, dx,$$

حيث $c(x)$ معامل المسامية* .

نكوّن معادلة توازن كتلة الغاز فى المنطقة (x_1, x_2) خلال الفترة الزمنية (t_1, t_2) :

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) \right] d\tau =$$

$$= S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] \, d\xi.$$

ومن هنا وكما فى الفقرة ١ نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{17}$$

التى تعتبر معادلة الانتشار . وهى مماثلة تمامًا لمعادلة التوصيل الحرارى . وعند استنباط هذه المعادلة اعتبرنا أنه لا توجد فى الأنبوبة مصادر للمادة وينعدم الانتشار خلال جدران الأنبوبة . ويؤدى الأخذ فى الاعتبار لهذه الظواهر إلى معادلتين مشابهتين للمعادلتين (15) , (14) (انظر الكتاب الثانى ، الباب الثانى - بند ٢ ، فقرة ٣) .

وإذا كان معامل الانتشار ثابتًا تأخذ معادلة الانتشار الصورة التالية :

$u_t = a^2 u_{xx}$ حيث $a^2 = D/c$.

وإذا كان معامل المسامية $c = 1$ وكان معامل الانتشار ثابتًا فإن معادلة الانتشار تأخذ الصورة

$$u_t = D u_{xx}.$$

فقرة ٣ : انتشار الحرارة فى الفراغ . إن عملية انتشار الحرارة فى الفراغ يمكن تحديدها بدرجة الحرارة $u(x, y, z, t)$ التى تعتبر دالة فى x, y, z, t .

* إن معامل المسامية هو نسبة حجم المسام إلى الحجم الكلى V_0 الذى يساوى فى حالتنا $S\,dx$.

وإذا كانت درجة الحرارة غير ثابتة فإنه تنشأ دفوق حرارية تتجه من الأماكن حيث درجات الحرارة الأعلى إلى الأماكن حيث درجة الحرارة المنخفضة .

نفرض أن $d\sigma$ مساحة صغيرة ما تحيط بالنقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ والعمودى عليها n . وكمية الحرارة المارة خلال $d\sigma$ فى وحدة الزمن تساوى وفقا لقانون فورييه :

$$W_n\, d\sigma = (Wn)\, d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma,$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى ، $\partial u/\partial n$ المشتقة فى اتجاه العمودى n على $d\sigma$ التى تساوى

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, z) = (\text{grad}\, u, n).$$

وكثيرًا ما يكتب قانون فورييه فى الصورة :

$$W = -k\, \text{grad}\, u,$$

حيث W متجه كثافة الدفق الحرارى .

وإذا كان الوسط ايزوتروبيا (متشابهًا isotropic) فإن k يكون كمية مقياسية (scalar) . وفى حالة الوسط الانيزوتروبى يكون k ممتدا (tensor) ويكون متجه الدفق الحرارى W هو عبارة عن حاصل ضرب الممتد k فى المتجه $\text{grad}\, u$ -. وسندرس فقط الأوساط الايزوتروبية .

ننتقل إلى استنباط معادلة التوصيل الحرارى فى الفراغ .

ندرس حجمًا ما V محدودًا بالسطح S . وتكون معادلة توازن الحرارة للحجم V خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ على الصورة :

$$\iiint_V c\rho[u(P, t_2) - u(P, t_1)]\, dV_P =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S W_n\, d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\iiint_V F(P, t)\, dV_P\right). \quad (18)$$

حيث $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ نقطة التكامل ، $dV_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ عنصر الحجم ، $c\rho$ السعة الحرارية لوحدة الحجم ، W_n المركبة العمودية لكثافة الدفق الحرارى .

وهذه المعادلة تعبر عن قانون حفظ الحرارة فى الحجم V خلال الفترة الزمنية Δt :
تغير كمية الحرارة فى الحجم V خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ (الطرف الأيسر فى (18)) ينتج بسبب دفق الحرارة خلال السطح الحدى S (الحد الأول فى الطرف الأيمن للمعادلة(18)) وكذلك بكمية الحرارة المنبعثة فى الحجم V خلال الفترة الزمنية Δt نتيجة لتأثير المصادر الحرارية .

وللانتقال من المعادلة التكاملية للتوازن إلى المعادلة التفاضلية ، نفرض أن الدالة $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ قابلة للتفاضل مرتين بالنسبة إلى x, y, z ومرة وحدة بالنسبة إلى t وأن هذه المشتقات تكون متصلة فى المنطقة محل الدراسة . وعندئذ يمكن الاستعانة بعلاقة وستروجرادسكى :

$$\iint_S W_n \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} \, dV$$

وتحويل معادلة التوازن إلى الصورة :

$$\iiint_V c\rho \, [u(P, t_2) - u(P, t_1)] \, dV_P =$$
$$= -\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{W} \, dV_P \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(P, t) \, dV_P \, dt.$$

(سنفرض أن $F(P, t)$ دالة متصلة فى متغيراتها) .

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة ونظرية التغيرات المحدودة للدوال فى عدة متغيرات نحصل على :

$$c\rho \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_3 \\ P=P_1}} \Delta t \cdot V = -\operatorname{div} \mathbf{W}\Big|_{\substack{t=t_4 \\ P=P_2}} \Delta t \cdot V + F\Big|_{\substack{t=t_5 \\ P=P_3}} \Delta t \cdot V,$$

حيث t_3, t_4, t_5 نقط وسطية فى الفترة Δt ، P_1, P_2, P_3 نقط فى الحجم V . نثبت نقطة ما $M(x, y, z)$ داخل الحجم V ونضغط (نجمع) الحجم V فى هذه النقطة ونجعل Δt تؤول إلى الصفر. وبعد اختصار $\Delta t V$ والانتقال إلى النهاية كما ذكرنا نحصل على :

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = -\operatorname{div} \mathbf{W}(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

وبالتعويض عن W من العلاقة $W = -k \operatorname{grad} u$ نحصل على المعادلة التفاضلية للتوصيل الحرارى

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

أو

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F.$$

وإذا كان الوسط متجانسًا فإن هذه المعادلة تكتب عادة فى الصورة

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

حيث $a^2 = k/c\rho$ معامل توصيل درجة الحرارة ، أو

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right),$$

حيث $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ مؤثر لابلاس .

فقرة ٤ : صياغة المسائل الحدية. للحصول على حل وحيد لمعادلة التوصيل الحرارى يلزم أن نضيف إلى المعادلة الشروط الابتدائية والشروط الحدية .

والشرط الابتدائى ، على خلاف المعادلة على النمط الزائدى ، ينحصر فقط فى إعطاء قيم الدالة $u(x, t)$ فى اللحظة الابتدائية t_0 . والشروط الحدية يمكن أن تختلف وفقًا للنظام الحرارى على الحدود. وتدرس ثلاثة أنماط أساسية للشروط الحدية .

١ ــ فى نهاية القضيب $x = 0$ معطاة درجة الحرارة

$$u(0, t) = \mu(t),$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة فى فترة ما $t_0 \leqslant t \leqslant T$ علمًا بأن T هى الفترة الزمنية التى خلالها تتم دراسة العملية .

٢ ــ فى نهاية القضيب $x = l$ معطاة قيمة المشتقة

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

ونصل إلى هذا الشرط ، إذا أعطى مقدار الدفق الحرارى $Q(l, t)$ السارى خلال المقطع الطرفى للقضيب

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

ومن هنا $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t)$ ، حيث $\nu(t)$ دالة معلومة يعبر عنها بدلالة الدفق المعطى $Q(l, t)$ بالعلاقة

$$\nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

٣ ـ فى الطرف $x = l$ معطاة علاقة خطية بين المشتقة والدالة

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)].$$

وهذا الشرط الحدى يناظر التبادل الحرارى وفقًا لقانون نيوتن على سطح الجسم مع الوسط المحيط الذى تكون درجة حرارته θ معلومة . وبالاستعانة بصيغتى الدفق الحرارى السارى خلال المقطع $x = l$

$$Q = h(u - \theta)$$

و

$$Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

نحصل على الصياغة الرياضية للشرط الحدى الثالث فى الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta(t)],$$

حيث $\lambda = h/k$ معامل التبادل الحرارى ، $\theta(t)$ دالة ما معطاة . وللطرف $x = 0$ من القضيب $(0, l)$ يكون الشرط الحدى الثالث على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)].$$

والشروط الحدية عند $x = l$, $x = 0$ يمكن أن تكون من أنماط مختلفة ومن ثم فعدد المسائل المختلفة يكون كبيرًا .

والمسألة الحدية الأولى تنحصر فى تعيين الحل $u = u(x, t)$ لمعادلة التوصيل الحرارى

$u_t = a^2 u_{xx}$ عند $0 < t \leqslant T$ ، $0 < x < l$

الذى يحقق الشروط

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$
$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

حيث $\mu_2(t)$ ، $\mu_1(t)$ ، $\varphi(x)$ دوال معطاة .

وبالمثل تصاغ المسائل الحدية الأخرى بتركيبات مختلفة من الشروط الحدية عند $x = l$ ، $x = 0$. ومن الممكن وجود شروط حدية من نمط أكثر تعقيداً من الأنماط التى سبق بحثها .

نفرض على سبيل المثال أنه وضعت عند الطرف $x = 0$ للقضيب سعة حرارية مركزة C_1 (على سبيل المثال جسم ذو توصيل حرارى كبير ، حيث يمكن اعتبار درجة الحرارة فى كل الجسم ثابتة) وأنه يحدث تبادل حرارى مع الوسط الخارجى وفقاً لقانون نيوتن . عندئذ يكون الشرط الحدى عند $x = 0$ (الذى يعبر عن معادلة التوازن الحرارى) على الصورة :

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

حيث u_0 درجة حرارة الوسط الخارجى . وهذا الشرط يحتوى على المشتقة $\frac{\partial u}{\partial t}$ (أو $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ إذا أخذنا فى الاعتبار أن $u_t = a^2 u_{xx}$) .

وإذا كان الوسط غير متجانس ومعاملات المعادلة عبارة عن دوال منفصلة فإن الفترة $(0, l)$ حيث يبحث عن الحل ، تقسم بنقط انفصال المعاملات إلى عدة أجزاء داخلها تحقق الدالة u معادلة التوصيل الحرارى وعلى حدودها تحقق شروط الترافق .

وفى الحالة المبسطة تنحصر هذه الشروط فى اتصال درجة الحرارة واتصال الدفق الحرارى

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$
$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

حيث x_i نقط انفصال المعاملات .

وعلاوة على المسائل المذكورة هنا كثيرًا ما تقابلنا الحالات النهائية لهذه المسائل . ندرس عملية التوصيل الحرارى فى قضيب طويل للغاية . وفى خلال فترة زمنية غير كبيرة يكون تأثير نظام درجة الحرارة المعطى على الحدود (على طرفى القضيب) تأثيرًا ضعيفًا للغاية فى الجزء الأوسط للقضيب فدرجة الحرارة فى هذا الجزء تتحدد أساسًا بالتوزيع الابتدائى لدرجة الحرارة فقط . وفى هذه الحالة فإن الحساب الدقيق لطول القضيب لا يكون له قيمة ، لأن تغير طول القضيب لا يحدث تأثيرًا جوهريًا على درجة الحرارة فى المنطقة التى تهمنا . وفى المسائل على مثل هذا النمط يعتبر القضيب لانهائى الطول . وبهذا الشكل تطرح المسألة بالشروط الابتدائية (مسألة كوشى) عن توزيع درجة الحرارة على مستقيم لانهائى :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $-\infty < x < \infty$ ، $t \geqslant t_0$ ، الذى يحقق الشرط

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

حيث $\varphi(x)$ دالة معطاة .

وبالمثل ، إذا كان جزء القضيب الذى نهتم بدرجة حرارته يوجد بالقرب من أحد طرفى القضيب بعيدًا عن الطرف الآخر فإن درجة الحرارة فى هذه الحالة تتحدد عمليا بنظام درجة حرارة الطرف الأقرب وبالشروط الابتدائية . وفى المسائل على مثل هذا النمط يعتبر القضيب عادة نصف لانهائى والإحداثى المحسوب ابتداء من طرف القضيب يتغير فى الحدود $0 \leqslant x \leqslant \infty$. نورد كمثال صياغة المسألة الحدية للقضيب نصف اللانهائى :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $0 < x < \infty$ ، $t_0 \leqslant t$ الذى يحقق الشرطين :

$$\left.\begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ u(0, t) &= \mu(t) \quad (t \geqslant t_0), \end{aligned}\right\}$$

حيث $\varphi(x)$ ، $\mu(t)$ دالتان معطاتان .

والمسائل الواردة أعلاه هى عبارة عن حالة نهائية (انحلال degeneration) للمسائل الحدية الأساسية. ومن الممكن وجود حالات نهائية للمسألة الحدية من نمط آخر عندما يهمل الحساب الدقيق للشروط الابتدائية. فتأثير الشروط الابتدائية عند انتشار الحرارة فى القضيب يضعف بمرور الوقت. فإذا كانت اللحظة التى تهمنا بعيدة بقدر كاف عن اللحظة الابتدائية فإن درجة الحرارة تتحدد عمليًا بالشروط الحدية لأن تغير الشروط الابتدائية لن يغير حالة درجة الحرارة فى القضيب فى حدود دقة الملاحظة. وفى هذه الحالة يمكن عمليا أن نعتبر أن التجربة تستمر زمنًا طويلاً لانهائيا ومن ثم تسقط الحاجة إلى الشروط الابتدائية.

وبذلك نتوصل إلى المسائل الحدية بدون شروط ابتدائية عندما يبحث عن حل معادلة التوصيل الحرارى للفترة $0 \leqslant x \leqslant l$ و $t > -\infty$ الذى يحقق الشرطين

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

ووفقًا لطبيعة النظام الحدى من الممكن صياغة صور أخرى من المسائل بدون شروط ابتدائية.

وتعتبر هامة على وجه الخصوص المسألة بلا شروط ابتدائية للقضيب نصف اللانهائى $(l = \infty)$، عندما يطلب تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى للفترة $0 < x < \infty, t > -\infty$ الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu(t),$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة.

وأكثر المسائل بلا شروط ابتدائية التى تقابلنا هى عند إعطاء نظام حدى دورى

$$\mu(t) = A \cos \omega t$$

(انظر الملحق ١ بالباب الثالث).

ومن الطبيعى أن نعتبر أنه بمرور فترة زمنية طويلة تتغير درجة حرارة القضيب عمليا بنفس القانون الدورى بنفس التردد. غير أننا إذا أردنا الأخذ فى الاعتبار الشروط الابتدائية بدقة فإننا شكليا لن نحصل أبدًا على حل دورى لأن تأثير

الشروط الابتدائية لن يؤول إلى الصفر رغم أنه يضعف بمرور الزمن . ولا معنى لأخذ هذا التأثير فى عين الاعتبار نظرًا للأخطاء الموجودة فى عملية الملاحظة . وبدراسة الحل الدورى نحن نهمل تأثير المعطيات الابتدائية .

إن صياغة المسائل الحدية الواردة فيما سبق لا تتعلق فقط بالمعادلة بمعاملات ثابتة . فنحن نقصد بجملة «معادلة التوصيل الحرارى» أية معادلة من معادلات الفقرات السابقة .

وعلاوة على المسائل الحدية الخطية المذكورة أعلاه تصاغ أيضًا مسائل بشروط حدية لاخطية ، على سبيل المثال على الصورة :

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma [u^4(0, t) - \theta^4(0, t)].$$

وهذا الشرط الحدى يناظر الإشعاع (الحرارى) وفقًا لقانون ستيفان ـ بولتسمان من الطرف $x = 0$ فى وسط حرارته $\theta(t)$. ونتوقف بتفصيل أكبر عند صياغة المسائل الحدية . ندرس المسألة الحدية الأولى لمنطقة محدودة .

إن حل المسألة الحدية الأولى هو تلك الدالة $u(x, t)$ التى تتميز بالخواص التالية :

١ ـ $u(x, t)$ معرفة ومتصلة فى المنطقة المغلقة

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

٢ ـ $u(x, t)$ تحقق معادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة المفتوحة

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

٣ ـ $u(x, t)$ تحقق الشرط الابتدائى والشرطين الحديين أى

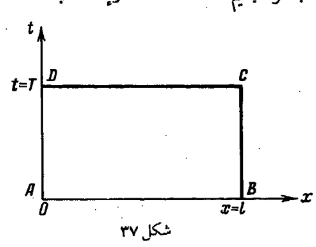
$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

حيث $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ دوال متصلة تحقق شروط الترافق

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) \quad [= u(0, t_0)] \quad , \quad \varphi(l) = \mu_2(t_0) \quad [= u(l, t_0)],$$

الضرورية لاتصال $u(x,t)$ فى المنطقة المغلقة .

ندرس مستوى الحالات الطورية (x,t) (شكل ٣٧) . وفى مسألتنا نبحث عن الدالة $u(x,t)$ المعرفة داخل المستطيل $ABCD$. وهذه المنطقة تعرف من صياغة المسألة نفسها لأنه يتم بحث عملية انتشار الحرارة فى القضيب $0 \leqslant x \leqslant l$ خلال الفترة الزمنية $t_0 \leqslant t \leqslant T$ حيث نعلم خلال هذه الفترة النظام الحرارى فى الطرفين . نفرض أن $t_0 = 0$. ونفترض أن $u(x,t)$ تحقق المعادلة فقط عند $0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T$ ولكن ليس عندما $t = 0$ (الضلع AB) وليس عندما $x = 0,\ x = l$ (الضلعان AD, BC) حيث تعطى الشروط الابتدائية والحدية مباشرة بقيم هذه الدالة . وإذا طلبنا أن تتحقق المعادلة على سبيل المثال عندما $t = 0$ فإننا بذلك نكون كما لو أننا طلبنا وجود المشتقة $\varphi'' = u_{xx}(x,0)$ التى تدخل فى المعادلة . وبهذا المطلب كنا سنضيق مجال الظواهر الفيزيائية المدروسة بأن نستثنى من دراستنا تلك الدوال التى لا يتحقق لها هذا المطلب . ودون



شكل ٣٧

افتراض اتصال $u(x,t)$ فى المنطقة $0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T$ (أى فى المستطيل المغلق $ABCD$) أو بدون شرط آخر يحل محل هذا الافتراض كان الشرط (٣) سيفقد معناه* . وبالفعل ندرس الدالة $v(x,t)$ المعرفة بالطريقة التالية :

$$\begin{aligned} &v(x,t) = C && (0 < x < l,\quad 0 < t \leqslant T),\\ &v(x,0) = \varphi(x) && (0 \leqslant x \leqslant l),\\ &\left.\begin{aligned} v(0,t) &= \mu_1(t),\\ v(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} && (0 \leqslant t \leqslant T), \end{aligned}$$

حيث C ثابت اختيارى . والدالة $v(x,t)$ كما هو واضح ، تحقق الشرط (٢) وكذلك الشروط الحدية . غير أن هذه الدالة لا تعبر عن عملية انتشار درجة الحرارة فى القضيب عند درجة الحرارة الابتدائية $\varphi(x) \neq C$ ودرجات الحرارة

* سندرس فيما بعد المسائل الحدية بشروط حدية وابتدائية منفصلة . ولهذه المسائل سيتم تدقيق المعنى المقصود به تحقيق الشروط الحدية .

الحدية $\mu_2(t) \neq C$ ، $\mu_1(t) \neq C$ لأنها منفصلة عندما $x = 0, x = l$ و $t = 0$.

إن اتصال الدالة $u(x, t)$ عندما $0 < x < l, 0 < t \leqslant T$ ينتج من أن هذه الدالة تحقق المعادلة . وبذلك فطلب اتصال $u(x, t)$ عندما $0 \leqslant x \leqslant l$ و $0 \leqslant t \leqslant T$ يتعلق من حيث الجوهر فقط بتلك النقط حيث تعطى القيم الحدية والابتدائية . وفيما سيلى بعد ذلك سنقصد بعبارة «حل المعادلة الذى يحقق الشروط الحدية» تلك الدالة التى تحقق الشروط (١) و (٢) و (٣) دون النص صراحة فى كل مرة على هذه الشروط إذا لم تستدع لذلك ضرورة خاصة .

وبالمثل تصاغ المسائل الحدية الأخرى بما فى ذلك المسائل على القضيب اللانهائى والمسائل بدون شروط ابتدائية .

وللمسائل فى عدة متغيرات هندسية مستقلة يحتفظ بصحته كل ما سبق ذكره . وفى هذه المسائل تعطى عندما $t = t_0$ درجة الحرارة الابتدائية وتعطى الشروط الحدية على سطح الجسم . ويمكن أيضًا دراسة مسائل للمناطق اللانهائية .

وبالنسبة إلى كل مسألة من المسائل المصاغة تنشأ الأسئلة التالية* :

(١) وحدانية حل المسألة المصاغة ،

(٢) وجود الحل ،

(٣) اعتماد الحل اعتمادًا متصلاً على الشروط الإضافية .

وإذا كان للمسألة المصاغة عدة حلول فإن عبارة «حل المعادلة» لا تكون ذات معنى محدد . ولذا فقبل التحدث عن حل المسألة يلزم إثبات وحدانيته . وللتطبيق العملى يكون السؤال الثانى هو السؤال الأكثر جوهرية لأنه عند إثبات وجود الحل تعطى عادة طريقة حساب الحل أيضًا .

وكما ذكرنا فيما سبق (الباب الثانى ، بند ٢ ، فقرة ٥) تسمى العملية عملية محددة فيزيائيًا إذا تغير حل المعادلة تغيرًا طفيفًا عندما تتغير الشروط الابتدائية

---

* انظر الباب الثانى ، بند ٢ .

والحدية للمسألة تغيرًا طفيفًا أيضًا . وفى المستقبل سنثبت أن عملية انتشار الحرارة تتحدد فيزيائيا بشروطها الابتدائية والحدية ، أى أن التغير الطفيف للشروط الحدية والابتدائية يناظره تغير طفيف للحل نفسه .

فقرة ٥ : مبدأ القيمة العظمى . فيما سيلى سندرس المعادلة ذات المعاملات الثابتة

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

وكما رأينا تؤول هذه المعادلة بالتعويض

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u$$

عندما

$$\mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

إلى الصورة

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

نثبت الخاصية التالية لحل هذه المعادلة والتى نسميها بمبدأ القيمة العظمى :

إذا كانت الدالة $u(x,t)$ المعرفة والمتصلة فى المنطقة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l$، $0 \leqslant t \leqslant T$ تحقق معادلة الاتصال الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{19}$$

فى نقط المنطقة $0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T$ فإن الدالة $u(x,t)$ تصل إلى قيمها العظمى والصغرى إما فى اللحظة الابتدائية وإما فى نقطتى الحدود $x = 0$ أو $x = l$.

والدالة $u(x,\ t) = \text{const.}$ تحقق ، كما هو واضح ، معادلة التوصيل الحرارى وتصل إلى قيمتها العظمى (الصغرى) فى أية نقطة. غير أن هذا لا يتناقض مع النظرية لأن من شرطها ينتج أنه إذا وصلت الدالة إلى قيمها العظمى (الصغرى) داخل المنطقة فإنها أيضًا (وليس فقط) ينبغى أن تصل إلى هذه القيمة العظمى (الصغرى) إما عندما $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = l$.

والمعنى الهندسى لهذه النظرية واضح : إذا كانت درجة الحرارة على الحدود وفى اللحظة الابتدائية لا تفوق قيمة معينة M فإنه مع انعدام المصادر الحرارية

لا يمكن أن تنشأ داخل الجسم درجة حرارة أكبر من M . ونتوقف أولاً عند إثبات النظرية فى حالة القيمة العظمى .

يتم إثبات هذه النظرية بافتراض تحقق العكس (الإثبات بالعكس). نرمز بالحرف M للقيمة العظمى للدالة $u(x, t)$ عندما $t = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ أو عندما $x = 0$ أو $x = l$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ * ونفرض أن الدالة $u(x, t)$ تصل فى نقطة ما (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leqslant T)$ إلى قيمتها العظمى المساوية

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

نقارن بين طرفى المعادلة (19) الأيمن والأيسر عند النقطة (x_0, t_0) . حيث إن الدالة تصل عند النقطة (x_0, t_0) إلى قيمتها العظمى فإنه من الضرورى يجب أن يكون**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \text{ ،} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0 \ . \qquad (20)$$

---

* إذا لم نفترض اتصال الدالة $u(x, t)$ فى المنطقة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T$ فإن الدالة $u(x, t)$ كان من الممكن ألا تصل إلى قيمتها العظمى فى أية نقطة وكانت التحليلات التالية ستصبح غير قابلة للتطبيق . ووفقا للنظرية التى تنص على أن أية دالة متصلة تصل إلى قيمتها العظمى فى المنطقة المغلقة يمكننا أن نكون واثقين من الآتى : (١) الدالة $u(x, t)$ تصل إلى قيمتها العظمى على الضلع الأسفل أو الضلعين الجانبيين للمستطيل وهذه القيمة العظمى قد رمزنا إليها بالحرف M ، (٢) إذا كانت الدالة $u(x, t)$ أكبر من M ولو فى نقطة واحدة فإنه توجد النقطة (x_0, t_0) حيث تصل الدالة $u(x, t)$ إلى قيمتها العظمى التى تكون أكبر من M :

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

علما بأن

$$0 < x_0 < l, \quad 0 < t_0 \leqslant T.$$

** بالفعل فكما نعلم من التحليل الرياضى تكون الشروط الكافية لكى تصل الدالة $f(x)$ فى النقطة x_0 الواقعة داخل الفترة $(0, l)$ إلى نهايتها الصغرى النسبية هى الشروط التالية : $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$ ، $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$. وبذلك فإذا كانت الدالة $f(x)$ فى النقطة x_0 لها نهاية عظمى فإن : (١) $f'(x_0) = 0$ و (٢) لا يمكن أن يكون $f''(x_0) > 0$ أى أن $f''(x_0) \leqslant 0$.

وبعد ذلك فحيث إن $u(x_0, t)$ تصل إلى قيمتها العظمى عند $t = t_0$ فإن*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0. \qquad (21)$$

وبمقارنة الإشارة فى طرفى المعادلة (19) نرى أن إشارتى الطرفين مختلفتان . غير أن هذا التحليل لا يثبت بعد النظرية لأن الطرف الأيمن والطرف الأيسر يمكن أن يكون كل منهما مساويًا للصفر مما لا يؤدى ما سبق ذكره من اختلاف الإشارتين إلى تناقض . وقد أوردنا هذا التحليل لإبراز الفكرة الأساسية فى الإثبات . وللإثبات الكامل نعين النقطة (x_1, t_1) التى فيها $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0$. ولهذا الغرض ندرس الدالة المساعدة

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \qquad (22)$$

حيث k عدد ثابت ما . ومن الواضح أن

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

وأن

$$k(t_0 - t) \leqslant kT.$$

نختار $k > 0$ بحيث يكون kT أصغر من $\varepsilon/2$ أى $k < \varepsilon/2T$. عندئذ فإن القيمة العظمى للدالة $v(x, t)$ عندما $t = 0$ أو $x = 0$ أو $x = l$ لن تفوق $M + \frac{\varepsilon}{2}$ ، أى أن

$$v(x, t) \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(عندما } t=0 \text{ أو } x=0 \text{ أو } x=l\text{)،} \qquad (23)$$

وذلك لأنه لهذه المتغيرات لا يفوق الحد الأول من العلاقة (22) المقدار M ولا يفوق الحد الثانى المقدار $\varepsilon/2$.

ووفقًا لاتصال الدالة $v(x, t)$ يجب أن تصل فى نقطة ما (x_1, t_1) إلى قيمتها العظمى . ومن الواضح أن

$$v(x_1, t_1) \geqslant v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

ولذا فإن $t_1 > 0$ ، $0 < x_1 < l$ لأنه عندما $t = 0$ أو $x = 0$ ، $x = l$ تتحقق

* عند ذلك يتضح أنه إذا كان $t_0 < T$ فإن $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. أما إذا كان $t_0 = T$ فإن $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$.

المتباينة (23). وفى النقطة (x_1, t_1) بالتناظر مع (20) و (21) يجب أن يكون $v_t(x_1, t_1) \geqslant 0$, $v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0$. وبالأخذ فى الاعتبار (22) نجد أن

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0,$$
$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geqslant k > 0.$$

ومن هنا ينتج أن

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geqslant k > 0,$$

أى أن المعادلة (19) فى النقطة الداخلية (x_1, t_1) لا تتحقق. وبذلك أثبتنا أن الدالة $u(x, t)$ حل معادلة التوصيل الحرارى (19) لا يمكن أن تصل داخل المنطقة إلى قيم تفوق القيمة العظمى للدالة $u(x, t)$ على الحدود (أى عند $x = 0, x = l$ و $t = 0$).

بالفعل وبالمثل يمكن اثبات الجزء الثانى من النظرية المتعلق بالقيمة الصغرى. ولا يتطلب ذلك إثباتاً خاصًا لأن الدالة $u_1 = -u$ لها قيمة عظمى حيث يكون للدالة u قيمة صغرى.

فقرة ٦ : نظرية الوحدانية. إذا كانت الدالتان $u_1(x, t), u_2(x, t)$ المعرفتان والمتصلتان فى المنطقة $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant l$ تحققان معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{للمنطقة } 0 < x < l,\ t > 0) \qquad (24)$$

ونفس الشروط الحدية والابتدائية

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t),$$

فإن $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ *.

لإثبات هذه النظرية ندرس الدالة

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

* فى فقرة ٣ ، بند ٢ سيتم تشديد هذه النظرية وحذف مطلب الاتصال عند $t = 0$.

وحيث إن الدالتين $u_2(x, t)$ ، $u_1(x, t)$ متصلتان عند

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

فإن الدالة $v(x, t)$ التى تساوى الفرق بينهما تكون أيضًا دالة متصلة فى نفس هذه المنطقة . وبوصفها الفرق بين حلين لمعادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $0 < x < l, t > 0$ تكون الدالة $v(x, t)$ حلا لمعادلة التوصيل الحرارى المتجانسة فى هذه المنطقة . وبذلك فإن مبدأ القيمة العظمى قابل للتطبيق على هذه الدالة ، أى أنها تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى إما عند $t = 0$ أو عند $x = 0$ أو عند $x = l$. غير أنه لدينا من الشرط

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

ولذا فإن

$$v(x, t) \equiv 0,$$

أى أن

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

ومن هنا ينتج أن حل المسألة الحدية الأولى يكون وحيدًا .

نثبت أيضًا عدة نتائج مباشرة لمبدأ القيمة العظمى . وعند ذلك سنقول ببساطة «حل معادلة التوصيل الحرارى» بدلاً من ذكر خواص الدوال التى تحقق فضلاً عن معادلة التوصيل الحرارى الشروط الابتدائية والحدية تفصيلاً .

١ ــ إذا حقق حلان لمعادلة التوصيل الحرارى $u_1(x, t), u_2(x, t)$ الشروط :

$$u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0),$$
$$u_1(0, t) \leqslant u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leqslant u_2(l, t),$$

فإن

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$$

لجميع قيم $0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T$.

بالفعل ، الفرق $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ يحقق الشروط التى أثبتنا بها مبدأ القيمة العظمى ، وعلاوة على ذلك

$$v(x, 0) \geqslant 0, \quad v(0, t) \geqslant 0, \quad v(l, t) \geqslant 0.$$

ولذا فإن

$$v(x, t) \geqslant 0$$

للمنطقة $0 < t \leqslant T$ ، $0 < x < l$ ، وإلا فالدالة $v(x, t)$ كان سيصبح لها قيمة صغرى سالبة فى المنطقة

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T.$$

٢ ـ إذا حققت ثلاثة حلول لمعادلة التوصيل الحرارى

$$u(x, t), \quad \underline{u}(x, t), \quad \bar{u}(x, t)$$

الشروط

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t)$$

عند

$$t = 0, \quad x = 0 \text{ ، } x = l,$$

فإن هذه المتباينات ستتحقق بالتطابق أى لجميع x, t عندما $0 \leqslant x \leqslant l$ ، $0 \leqslant t \leqslant T$.

وهذا المنطوق يعتبر تطبيقاً للنتيجة ١ على زوجى الدوال .

$$\underline{u}(x, t), \quad u(x, t) \text{ و } u(x, t), \quad \bar{u}(x, t) .$$

٣ ـ إذا تحققت لحلين من حلول معادلة التوصيل الحرارى $u_2(x,t)$ ، $u_1(x,t)$ المتباينة

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon$$

للقيم

$$t = 0, \quad x = 0, \quad x = l,$$

فإن

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon$$

بالتطابق أى تتحقق هذه المتباينة لجميع x, t من

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

وهذا المنطوق ينتج من النتيجة ٢ إذا طبقناها على حلول معادلة التوصيل الحرارى

$$\underline{u}(x, t) = -\varepsilon,$$
$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$
$$\bar{u}(x, t) = \varepsilon.$$

والنتيجة ٣ تكفل إثبات الاعتماد المتصل لحل المسألة الحدية الأولى على القيمة الابتدائية والقيم الحدية . فإذا أخذنا فى مسألة فيزيائية ما بدلاً من حل معادلة التوصيل الحرارى المناظر للشرط الابتدائى والشرطين الحديين

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

الحل $u(x,t)$ المناظر لقيمة ابتدائية أخرى وقيمتين حديتين أخريين معرفة بالدوال $\mu_2^*(t)$, $\mu_1^*(t)$, $\varphi^*(x)$ التى لا تختلف فى حدود درجة الدقة المعطاة ε عن الدوال $\mu_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\varphi(x)$:

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_1^*(t)| \leqslant \varepsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_2^*(t)| \leqslant \varepsilon,$$

فإن الدالة $u_1(x,t)$ ستختلف عن الدالة $u(x,t)$ فى حدود نفس درجة الدقة ε

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leqslant \varepsilon.$$

وفى ذلك ينحصر مبدأ التحديد الفيزيائى للمسألة .

ولقد أوردنا بالتفصيل موضوع وحدانية الحل والتحديد الفيزيائى للمسألة على مثال المسألة الحدية الأولى لمستقيم محدود . ونظرية الوحدانية للمسألة الحدية الأولى لمنطقة محدودة فى الفراغ الثنائى أو الثلاثى الأبعاد يمكن أن تثبت بالتكرار الحرفى لنفس التحليلات السابقة .

وتنشأ موضوعات ومشاكل مشابهة عند دراسة المسائل الأخرى التى تمت صياغة عدد منها فى الفقرات السابقة . وهذه المسائل تتطلب بعض التغييرات فى شكل طريقة الإثبات . ووحدانية حل المسألة للمنطقة غير المحدودة (انظر فقرة ٧) أو للمسائل بلا شروط ابتدائية تكون صحيحة عند فرض بعض الشروط الإضافية على الدوال محل الدراسة .

فقرة ٧ : نظرية الوحدانية للمستقيم اللانهائى . عند حل المسألة على مستقيم لانهائى يعتبر جوهريًا مطلب محدودية الدالة المطلوب تعيينها فى كل

المنطقة ، أى مطلب وجود ذلك العدد M بحيث يكون $|u(x,t)| < M$ لجميع $-\infty < x < +\infty$ و $t \geqslant 0$.

إذا كانت الدالتان $u_1(x,t)$ ، $u_2(x,t)$ المتصلتان والمحدودتان فى كل منطقة تغير المتغيرين (x,t) تحققان معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0) \tag{19}$$

والشرط

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

فإن

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0).$$

ندرس كالمعتاد الدالة

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

الدالة $v(x,t)$ متصلة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى ومحدودة فى كل المنطقة

$$|v(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0)$$

وتحقق الشرط

$$v(x, 0) = 0.$$

ومبدأ القيمة العظمى الذى استخدمناه فى إثبات وحدانية حل المسألة للمستقيم المحدود غير قابل للتطبيق هنا لأن الدالة $v(x,t)$ فى المنطقة اللامحدودة يمكن ألا تصل أبدًا إلى أية قيم عظمى . وللاستعانة بهذا المبدأ ندرس المنطقة :

$$|x| \leqslant L,$$

حيث L عدد مساعد سنقوم فيما بعد بزيادته زيادة لانهائية ، وندرس أيضًا الدالة

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{25}$$

والدالة $V(x,t)$ متصلة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى وهو ما يمكن التأكد منه مباشرة بإجراء عملية التفاضل ، وفضلاً عن ذلك تتميز هذه الدالة بالخاصيتين التاليتين :

$$\begin{aligned} &V(x, 0) \geqslant |v(x, 0)| = 0, \\ &V(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant |v(\pm L, t)|. \end{aligned} \tag{26}$$

وللمنطقة المحدودة $|x| \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T$ يكون مبدأ القيمة العظمى صحيحا . وبتطبيق النتيجة ٢ من الفقرة السابقة على الدوال $\underline{u} = -V(x, t)$. $u = v(x, t)$. $\bar{u} = V(x, t)$ وأخذ العلاقة (26) بعين الاعتبار نحصل على :

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leqslant v(x, t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

وبتثبيت قيمة معينة (x, t) والاستعانة بالطابع الاختيارى لاختيار L سنقوم بزيادته زيادة لانهائية . بالانتقال إلى النهاية عند $L \to \infty$ نحصل على

$$v(x, t) \equiv 0,$$

مما يثبت النظرية .

بند ٢ ـ طريقة فصل المتغيرات

فقرة ١ : المسألة الحدية المتجانسة . ننتقل إلى حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لتوصيل الحرارى على المستقيم المحدود

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l,\ t > 0) \tag{1}$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

وبالشروط الحدية

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

ونبدأ دراسة المسألة الحدية الأولى العامة بحل المسألة المبسطة التالية I :

عين الحل المتصل فى المنطقة المغلقة $(0 \leqslant x \leqslant l\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ للمعادلة المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ \ 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

الذى يحقق الشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2}$$

والشرطين الحديين المتجانسين

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5}$$

ولحل هذه المسألة ندرس أولاً ، كما هو متبع فى طريقة فصل المتغيرات ، المسألة الأساسية المساعدة التالية :

عين حل المعادلة

$$u_t=a^2u_{xx},$$

الذى لا يساوى الصفر بالتطابق ويحقق الشروط الحدية المتجانسة

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 \tag{5}$$

ويمكن التعبير عنه فى الصورة

$$u(x, t)=X(x)\, T(t), \tag{6}$$

حيث $X(x)$ دالة فى المتغير x فقط . $T(t)$ دالة فى المتغير t فقط .

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل (6) فى المعادلة (4) وقسمة طرفى المتساوية على a^2XT نحصل على :

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda, \tag{7}$$

حيث $\lambda=\text{const}$ لأن الطرف الأيسر للمتساوية يعتمد فقط على t والطرف الأيمن يعتمد فقط على x .

ومن هنا ينتج أن

$$X''+\lambda X=0, \tag{8}$$
$$T'+a^2\lambda T=0, \tag{8'}$$

وتعطى الشروط الحدية (5) :

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{9}$$

وبذلك فلتعيين الدالة $X(x)$ حصلنا على مسألة القيم الذاتية (مسألة شتورم ــ ليوفيل)

$$X''+\lambda X=0, \quad X(0)=0, \quad X(l)=0, \tag{10}$$

التى بحثناها عند حل معادلة الذبذبات فى الباب الثانى (انظر بند ٣ ، فقرة ١) .
وعندئذ أوضحنا أنه فقط لقيم البارامتر λ المساوية

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

توجد حلول غير تافهة (غير صفرية) للمعادلة (8) تساوى :

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{12}$$

وهذه القيم λ_n تناظرها حلول المعادلة (8′)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

حيث C_n معاملات قابلة للتحديد .

وبالعودة الى المسألة المساعدة الأساسية نرى أن الدوال :

$$u_n(x, t) = X_n(x)\,T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

تعتبر حلولاً خاصة للمعادلة (4) تحقق الشروط الحدية الصفرية .

نعود الآن إلى حل المسألة (I) . نكوّن شكليا المتسلسلة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

الدالة $u(x, t)$ تحقق الشروط الحدية لأن كل حدود المتسلسلة تحققها . وإذا طلبنا تحقق الشروط الابتدائية نحصل على :

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{16}$$

أى أن C_n تعتبر معاملات فوريية للدالة $\varphi(x)$ عند تحليلها فى متسلسلة الجيوب فى الفترة $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\cdot d\xi. \tag{17}$$

ندرس الآن المتسلسلة (15) بالمعاملات C_n المحددة بالعلاقة (17) ونوضح أن هذه المتسلسلة تحقق كل شروط المسألة (I) . ولهذا الغرض يجب إثبات أن الدالة

$u(x,t)$ المعرفة بالمتسلسلة (15) قابلة للتفاضل وتحقق المعادلة فى المنطقة $0 < x < l,\ t > 0$ ومتصلة فى نقط حدود هذه المنطقة (عند $t = 0$ و $x = 0$ و $x = l$) .

وحيث إن المعادلة (4) خطية فإنه وفقًا لمبدأ التراكب تكون المتسلسلة المكونة من الحلول الخاصة حلا أيضًا إذا كانت متقاربة وكان يمكن تفاضلها حدا حدا مرتين بالنسبة إلى x ومرة بالنسبة إلى t (انظر المأخوذة بالباب الثانى - بند ٣ ، فقرة ٣) . نوضح أنه عند $0 < \bar{t} \leqslant t$ ($\bar{t}$ أى عدد مساعد) تتقارب بانتظام متسلسلتا المشتقات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \cdot$$

بالفعل

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x\right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}.$$

وفيما بعد ستصاغ الشروط الإضافية التى يجب أن تحققها الدالة $\varphi(x)$. نفرض فى البداية أن $\varphi(x)$ دالة محدودة . $|\varphi(x)| < M$. عندئذ يكون

$$|C_n| = \left|\frac{2}{l}\right| \left|\int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi\right| < 2M,$$

ومن هنا ينتج أن :

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad , \quad t \geqslant \bar{t}$$

وبالمثل

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad , \quad t \geqslant \bar{t}.$$

وبوجه عام

$$\left|\frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \, \partial x^l}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad , \quad t \geqslant \bar{t}.$$

نبحث تقارب متسلسلة الحد الأعظم (majorant) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ حيث

$$\alpha_n = Nn^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}}. \qquad (15')$$

وتبعًا لاختبار دالمبرت تتقارب هذه المتسلسلة لأن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{n^q}\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 \bar{t}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (2n+1)\bar{t}} = 0.$$

ومن هنا ينتج إمكانية تفاضل المتسلسلة (15) حدًا حدًا أى عدد من المرات فى المنطقة $t \geqslant \bar{t} > 0$. وبعد ذلك فبالاستعانة بمبدأ التراكب نستنتج أن الدالة المعرفة بهذه المتسلسلة تحقق المعادلة (4) . ووفقًا للطابع الاختيارى للعدد $\bar{t}$ يسرى ذلك لجميع $t > 0$. وبذلك أثبتنا أنه عند $t > 0$ تعبر المتسلسلة (15) عن دالة قابلة للتفاضل عدد المرات اللازم وتحقق المعادلة (4) * .

وإذا كانت الدالة $\varphi(x)$ متصلة ولها مشتقة متقطعة الاتصال وتحقق الشرطين $\varphi(0) = 0$ ، $\varphi(l) = 0$ فإن المتسلسلة

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (15)$$

تعرف دالة متصلة عند $t \geqslant 0$. بالفعل من المتباينة :

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \qquad (t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l)$$

ينتج مباشرة التقارب المنتظم للمتسلسلة (15) عند $t \geqslant 0$ ، $0 \leqslant x \leqslant l$ مما يثبت صحة المنطوق السابق إذا ما أخذنا فى الاعتبار أنه للدالة $\varphi(x)$ المتصلة والمتقطعة الملوسة (piecewise smooth) تتقارب المتسلسلة المتكونة من القيم المطلقة لمعاملات فورييه إذا كان ** $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

---

* عند إثبات أن المتسلسلة (15) تحقق المعادلة $u_t = a^2 u_{xx}$ عند $t > 0$ استخدمنا فقط كون معاملات فورييه C_n محدودة وهذا صحيح كحالة خاصة لأية دالة محدودة $\varphi(x)$.

** انظر الباب الثانى ، بند ٣ ، فقرة ٣ .

وهكذا تم بالكامل حل مسألة تعيين حل المسألة الحدية الأولى للمعادلة المتجانسة بالشروط الحدية الصفرية والشرط الابتدائى المتصل والمتقطع الملوسة .

فقرة ٢ : دالة المصدر . نحول الحل الناتج (15) بالتعويض عن C_n بقيمها :

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi\, d\xi\right] \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi\right] \varphi(\xi)\, d\xi .$$

وتغيير ترتيب عمليتى التجميع والتكامل صحيح دائمًا عند $t>0$ نظرًا لأن المتسلسلة بين القوسين تتقارب بانتظام بالنسبة إلى ξ عند $t>0$ *.

نستعين بالرمز

$$G(x, \xi, t)=\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi . \tag{18}$$

وبالاستعانة بالدالة $G(x, \xi, t)$ يمكن التعبير عن الدالة $u(x, t)$ فى الصورة

$$u(x, t)=\int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi)\, d\xi . \tag{19}$$

والدالة $G(x, \xi, t)$ تسمى بدالة المصدر اللحظى النقطى أو بتفصيل أكبر دالة التأثير الحرارى لمصدر حرارى لحظى نقطى .

نبين أن دالة المصدر $G(x, \xi, t)$ تمثل باعتبارها دالة فى x توزيع درجات الحرارة فى القضيب $0 \leqslant x \leqslant l$ فى اللحظة الزمنية t إذا كانت درجة الحرارة فى اللحظة الابتدائية $t=0$ مساوية للصفر وفى هذه اللحظة تنبعث عند النقطة $x=\xi$ لحظيا كمية حرارة (سنحدد مقدارها فيما بعد) ، وعند طرفى القضيب يحتفظ باستمرار بدرجة حرارة صفرية .

* المتسلسلة $\sum \alpha_n$ حيث α_n تحدد بالعلاقة (15′) تعتبر عند $q=0$ متسلسلة الحد الاعظم للمتسلسلة بين القوسين .

والصيغة «كمية الحرارة Q المنبعثة فى النقطة ξ » تعنى كالمعتاد أن لدينا حرارة منبعثة على فترة «غير كبيرة» حول النقطة ξ محل الدراسة . وتغير درجة الحرارة $\varphi_\varepsilon(\xi)$ الناتج من ظهور حرارة حول النقطة يكون كما هو واضح مساويًا للصفر خارج الفترة $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ التى تنبعث عليها الحرارة ، وداخل هذه الفترة يمكن اعتبار $\varphi_\varepsilon(\xi)$ دالة موجبة ومتصلة وقابلة للتفاضل يكون لها

$$c\rho \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = Q, \tag{20}$$

لأن الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمثل أيضًا كمية الحرارة المؤدية إلى تغير درجة الحرارة بمقدار $\varphi_\varepsilon(\xi)$. وعملية انتشار درجة الحرارة فى هذه الحالة تتحدد بالعلاقة (19) :

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi. \tag{21}$$

والآن ننتقل إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$. بأخذ اتصال G عندما $t > 0$ فى الاعتبار وكذلك المتساوية (20) وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة عند قيمتين ثابتتين لـ x, t نحصل على :

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x, \xi, t)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi =$$

$$= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = G(x, \xi^*, t)\frac{Q}{c\rho}, \tag{21'}$$

حيث ξ^* نقطة ما متوسطة فى الفترة $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$. ووفقًا لاتصال الدالة $G(x, \xi, t)$ بالنسبة إلى ξ عند $t > 0$ نحصل على :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t) =$$

$$= \frac{Q}{c\rho} \cdot \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x \cdot \sin\frac{\pi n}{l} \xi. \tag{22}$$

ومن هنا ينتج أن $G(x, \xi, t)$ تمثل درجة الحرارة فى النقطة x فى اللحظة t الناتجة بسبب المصدر اللحظى النقطى الذى قدرته $Q = c\rho$ والموضوع فى اللحظة $t = 0$ عند النقطة ξ من نقط الفترة $(0, l)$.

ونشير إلى الخاصية التالية للدالة $G(x, \xi, t)$: الدالة $G(x, \xi, t) \geqslant 0$ لأى x, ξ و $t > 0$. بالفعل ندرس الدالة الابتدائية $\varphi_\varepsilon(x)$ التى تتميز بالخواص المذكورة أعلاه والحل المناظر لها $(21')$. فمن عدم سلبية الشروط الابتدائية والحدية ينتج وفقًا لمبدأ القيمة العظمى أن

$$u_\varepsilon(x, t) \geqslant 0$$

لجميع $0 \leqslant x \leqslant l$ و $t > 0$. ومن هنا بالاستعانة بالعلاقة $(21')$ يكون لدينا :

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t)\frac{Q}{c\rho} \geqslant 0 \quad (\text{عند } t > 0) \tag{21''}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل من $(21')$ على المتباينة

$$G(x, \xi, t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x, \quad \xi \leqslant l, \quad t > 0,$$

وهو المطلوب إثباته .

ولهذه النتيجة معنى فيزيائى بسيط . غير أنه يصعب توضيحه من العلاقة (19) مباشرة لأن $G(x, \xi, t)$ إنما يعبر عنها بمتسلسلة متعاقبة الإشارات .

فقرة ٣ : المسائل الحدية بشروط ابتدائية منفصلة . تتعلق النظرية الواردة أعلاه بالحلول المتصلة لمعادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l$ ، $0 \leqslant t \leqslant T$. وتعتبر شروط الاتصال هذه مقيدة ومحددة للغاية . فبالفعل ندرس المسألة المبسطة لتبريد قضيب مسخن بانتظام عندما تكون درجة الحرارة عند طرفيه مساوية للصفر . والشروط الإضافية تكون على الصورة :

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

وإذا كانت $u_0 \neq 0$ فإن حل هذه المسألة يجب أن يكون منفصلاً فى النقطتين $(0, 0)$ ، $(l, 0)$. ويوضح هذا المثال أن شروط اتصال القيمة الابتدائية وشروط ترافقها مع القيم الحدية تستبعد من الدراسة حالات هامة من الناحية العملية . غير أن العلاقة (19) تعطى حل المسألة الحدية فى هذه الحالة أيضًا .

وفى التطبيقات كثيرًا ما يستعان بعلاقات تخرج عن حدود شروط تطبيقها وأحيانًا لا يطرح مطلقًا موضوع شروط تطبيق هذه العلاقات . والتبرير المنطقى والسليم لأساس جميع العلاقات كان سيصبح عملية مطولة للغاية مما كان سيصرف

اهتمام الباحث عن جوانب الظاهرة الكمية والكيفية المميزة للجوهر الفيزيائى للعملية .

غير أننا نرى أنه من الضرورى ـ ولو للأمثلة المبسطة على الأقل ـ إعطاء التبرير لأساس الجهاز الرياضى الكافى لحل المسائل الأساسية .

ندرس المسائل الحدية بدوال ابتدائية متقطعة الاتصال دون أن نفترض أن الدالة الابتدائية مترافقة مع الشروط الحدية . إن هذه المجموعة من الشروط الإضافية تعتبر عامة بشكل كاف بالنسبة لمتطلبات التطبيقات العملية وبسيطة بشكل يكفى لعرض النظرية . إن هدفنا هو إثبات أن نفس العلاقة (19) تعطى حل المسألة المطروحة . نجرى بحث هذه المسألة على عدة مراحل . نثبت مسبقًا النظرية التالية :

حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < l, \ \ t > 0), \tag{4}$$

المتصل فى المنطقة المغلقة $(0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$ والذى يحقق الشروط

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

حيث $\varphi(x)$ دالة متصلة اختيارية تؤول إلى الصفر عند $x = 0, x = l$ ، يكون محددًا تحديدًا أحادى القيمة ويعبر عنه بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{19}$$

وهذه النظرية أثبتت أعلاه بافتراض تحقق شرط إضافى هو قابلية التفاضل المتقطع الاتصال للدالة $\varphi(\xi)$.

لنتحرر من هذا الشرط . ندرس متتابعة من الدوال المتصلة والمتقطعة القابلية للتفاضل $(\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0)$ $\varphi_n(\xi)$ تتقارب بانتظام إلى $\varphi(x)$. (بمثابة $\varphi_n(x)$ يمكن على سبيل المثال أخذ الدوال المتمثلة بخطوط منكسرة منطبقة على $\varphi(x)$ عند النقط $\frac{l \cdot k}{n}$ حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n$). والدوال $u_n(x, t)$ المعرفة بالعلاقة (19) بدلالة $\varphi_n(x)$ تحقق كل شروط النظرية لأن $\varphi_n(x)$ تحقق شروط قابلية

التفاضل المتقطع . وهذه الدوال تتقارب بانتظام وتعرف فى النهاية دالة متصلة $u(x, t)$. بالفعل ، لأى ε يمكن تعيين $n(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$(0 \leqslant x \leqslant l) \quad |\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad \text{إذا كان} \quad n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon) \text{ ،}$$

وذلك لأن هذه الدوال تتقارب بانتظام تبعًا للفرض . ومن هنا ووفقًا لمبدأ القيم العظمى ينتج أيضًا أن

$$(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T) \quad |u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon \quad \text{إذا كان} \quad n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon) \text{ ،}$$

مما يثبت التقارب المنتظم لمتتابعة الدوال $u_n(x, t)$ إلى دالة متصلة ما $u(x, t)$.

وإذا ثبتنا النقطة (x, t) وانتقلنا إلى النهاية تحت علامة التكامل فإننا سنحصل على أن الدالة

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \to \infty} \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_n(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

متصلة فى المنطقة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T$ وتحقق الشرط الابتدائى (2) . ووفقًا للهامش الملحق بالصفحة ٢٤٠ لا يصعب التأكد من أن هذه الدالة تحقق أيضًا المعادلة (4) عند $t > 0$. وهكذا انتهى إثبات النظرية .

والعلاقة (19) تعطى الحل المتصل الوحيد للمسألة محل البحث .

ننتقل إلى إثبات نظرية الوحدانية لحالة الدالة الابتدائية المتقطعة الاتصال $\varphi(x)$ دون افتراض أن هذه الدالة مترافقة مع الشروط الحدية . تثبت أن الدالة المتصلة فى المنطقة $t > 0$ التى تحقق معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{4}$$

فى المنطقة $0 < x < l,\ t > 0$ والشروط الحدية الصفرية

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{5}$$

والشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

تكون محددة تحديدًا أحادى القيمة إذا كانت :

١ ــ متصلة فى نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$ و

٢ ــ محدودة فى المنطقة المغلقة $0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \bar{t}_0$ حيث $\bar{t}_0$ عدد اختيارى موجب .

نفرض أن هذه الدالة موجودة . من الواضح أنه وفقًا للنظرية السابقة يمكن التعبير عنها فى المنطقة $t > \bar{t}$ بالعلاقة :

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi)\, d\xi \qquad (t > \bar{t} > 0) \qquad (19')$$

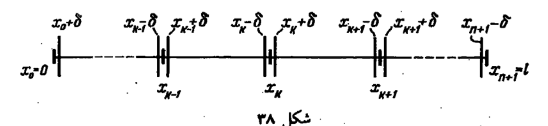
لأى $\bar{t}$ حيث $\bar{t}$ قيمة مساعدة ،

$$0 < \bar{t} \leqslant t, \qquad \varphi_{\bar{t}}(x) = u(x, \bar{t}).$$

نجرى عملية الانتقال إلى النهاية فى هذه العلاقة عندما $\bar{t} \to 0$ مع الاحتفاظ بـ x و t ثابتين . نوضح* أن الانتقال إلى النهاية ممكن تحت علامة التكامل - وبالتالى فالدالة $u(x, t)$ يمكن التعبير عنها فى صورة التكامل

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \qquad (19)$$

الذى يحددها تحديدا أحادى القيمة .



شكل ٣٨

نفرض أن $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقط انفصال الدالة $\varphi(x)$. بفرض $x_0 = 0$ ، $x_{n+1} = l$ (شكل ٣٨) وبأخذ الفترات المغلقة $I_k\ (x_k + \delta \leqslant x \leqslant x_{k+1} - \delta)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ حيث δ عدد ما مثبت وصغير بشكل كاف . لا يكون من الصعب التأكد من أن الدالة المكاملة فى $(19')$ تتقارب بانتظام إلى الدالة المكاملة فى (19) فى أية فترة مغلقة I_k $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$. وفى الفترات المغلقة $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ $\bar{I}_k\ (x_k - \delta \leqslant x \leqslant x_k + \delta)$ ، $\bar{I}_{n+1}\ (x_{n+1} - \delta \leqslant x \leqslant x_{n+1})$ ، $\bar{I}_0\ (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta)$ تكون الصيغتان المكاملتان فى

---

* النظرية المثبتة فيما سيلى تعتبر حالة خاصة لنظرية ليبيج حول إمكانية الانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل إذا كانت متتابعة الدوال $F_n(x)$ تتقارب - تقريبا فى كل مكان - إلى الدالة المجموع النهائية $F(x)$ وإذا كانت هذه المتتابعة محدودة بالدالة المجموع . وهذا الإثبات نورده لتجنب استخدام مفاهيم نظرية الفئات . وإذا استخدمنا مفاهيم نظرية الفئات فإنه يمكن بالمثل تماما إثبات النظرية التى تنص على أن حل معادلة التوصيل الحرارى $u(x, t)$ الذى يحقق الشروط الحدية الصفرية يكون معرفا تعريفا أحادى القيمة :

(١) إذا كانت $u(x, t) \leqslant F(x)$ حيث $F(x)$ دالة مجموع ما و

(٢) إذا كان تقريبا فى كل مكان

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

حيث $\varphi(x)$ الدالة المجموع الابتدائية المعطاة .

(19′) ، (19) محدودتين بعدد ما N عند أي $\bar{t}$ $(0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_0)$ وذلك نظرا لتحديد الدالة $u(x, t)$ المفترض ونظرا لاتصال $G(x, \xi, t)$ عند $0 \leqslant \xi \leqslant l,\ t > 0$. وبتقسيم الفرق بين التكاملين (19) ، (19′) إلى $2n+3$ تكامل مأخوذة على I_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ و $\bar{I}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ نرى أن هذا الفرق يمكن جعله أقل من أى عدد معطى مسبقا ε. إذا كان

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3}\frac{1}{4N},$$

ومن ثم فإن :

$$\left|\int_{\bar{I}_k}\left[G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\right]d\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3},$$

وإذا كان $\bar{t}$ قد اختير صغيرًا لدرجة أن

$$\left|G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\right| < \frac{1}{l}\frac{\varepsilon}{2n+3}$$

لأى $t \leqslant \bar{t}$ على I_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ ومن ثم يكون

$$\int_{I_k}\left[G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\right]d\xi < \frac{\varepsilon}{2n+3}$$

لـ $(k=0, 1, \ldots, n)$ $t \leqslant \bar{t}$

ومن هنا تنتج المتباينة

$$\left|\int_0^l\left[G(x, \xi, t-\bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\right]d\xi\right| < \varepsilon$$

لـ $t \leqslant \bar{t}$. التي تثبت قانونية الانتقال إلى النهاية عندما $\bar{t} \to 0$ تحت علامة التكامل . وبذلك فإذا وجدت الدالة $u(x, t)$ التي تحقق شروط النظرية فإنها قابلة للتعبير عنها فى الصورة (19) مما يثبت وحدانية هذه الدالة .

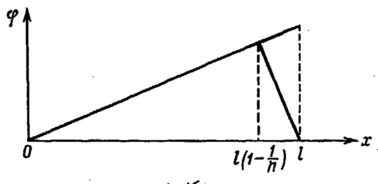
نثبت الآن أن العلاقة (19) هى عبارة عن الحل المحدود للمعادلة (4) الذى يحقق الشروط (2) لأى دالة متقطعة الاتصال $\varphi(x)$ ويكون متصلاً فى كل نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$.

وسنثبت هذه النظرية على مرحلتين . نثبت أنها صحيحة إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ دالة خطية :

$$\varphi(x) = cx. \qquad (2')$$

ندرس متتابعة الدوال المساعدة المتصلة (شكل ٣٩)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leqslant x \leqslant l\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ \alpha(l - x), & l\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant x \leqslant l, \quad \alpha = (n-1)c. \end{cases}$$



شكل ۳۹

والدوال $u_n(x, t)$ المعرفة بواسطة العلاقة (19) للدوال $\varphi_n(x)$ تعتبر حلولاً متصلة لمعادلة التوصيل الحرارى بالشروط الحدية الصفرية والشروط الابتدائية

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

وحيث إن :

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

فإنه وفقًا لمبدأ القيم العظمى يكون :

$$u_n(x, t) \leqslant u_{n+1}(x, t).$$

والدالة $U_0(x) = cx$ تعتبر حلاً متصلاً لمعادلة التوصيل الحرارى . ووفقًا لمبدأ القيم العظمى يكون

$$u_n(x, t) \leqslant U_0(x),$$

لأن هذه المتباينة تكون صحيحة عندما $t = 0$. $x = l$,$x = 0$. وبذلك فإن $u_n(x, t)$ هى متتابعة غير متناقصة باطراد محدودة من أعلى بالدالة $U_0(x)$. ومن هنا ينتج أن هذه المتتابعة متقاربة . ولا يصعب ملاحظة أن

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi_n(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\, d\xi \leqslant U_0(x),$$

لأن الانتقال إلى النهاية تحت علامة التكامل قانونى . ووفقًا لهامش الصفحة ٢٤٠ فإن هذه الدالة تحقق المعادلة والشروط الحدية الصفرية عند $t > 0$. نثبت أن هذه الدالة متصلة عند $t = 0$ فى الفترة $0 \leqslant x < l$. نفرض أن $x_0 < l$. نختار n بحيث يكون $x_0 < l\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. فى هذه الحالة $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. وبالأخذ فى الاعتبار أن

$$u_n(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant U_0(x)$$

وأن

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \to x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

نستنتج وجود النهاية

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

التى لا تعتمد على طرق الاقتراب $x \to x_0$ ، $t \to 0$. ومن هنا ينتج اتصال $u(x, t)$ فى النقطة $(x_0, 0)$. وهذه الدالة محدودة لأنها لا تفوق $U_0(x)$. وهكذا أثبتت النظرية للدالة $\varphi(x) = cx$.

وبالتعويض عن x بـ $l - x$ نتأكد من أن النظرية صحيحة للدالة

$$\varphi(x) = b(l - x). \qquad (2'')$$

ومن هنا ينتج أنها صحيحة لأية دالة على الصورة

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

لأن مثل هذه الدالة يمكن الحصول عليها بجمع $(2')$ و $(2'')$. وبعد ذلك فإنه ينتج من هنا أيضًا أن النظرية صحيحة لأى دالة متصلة بدون الافتراض بأن $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. بالفعل يمكن التعبير عن أية دالة $\varphi(x)$ من هذا النمط فى الصورة

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l}(\varphi(l) - \varphi(0))\right] + \psi(x),$$

حيث الحد بين القوسين المربعين دالة خطية و$\psi(x)$ دالة متصلة تؤول إلى الصفر عند طرفى الفترة : $\psi(0) = \psi(l) = 0$. وحيث إننا تأكدنا بالفعل من أن النظرية

قابلة للتطبيق على كل حد فإنه ينتج من هنا أن النظرية صحيحة أيضًا للدالة $\varphi(x)$.

وننتقل الآن إلى إثبات النظرية لأية دالة متقطعة الاتصال $\varphi(x)$. العلاقة (19) فى هذه الحالة أيضًا تحدد الحل الذى يحقق المعادلة والشروط الحدية الصفرية .

نفرض أن النقطة x_0 نقطة ما من نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$. نثبت أنه لأى ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون $|u(x,t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$ إذا كان $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ و $t<\delta(\varepsilon)$. ووفقًا لاتصال الدالة $\varphi(x)$ فى النقطة x_0 يوجد $\eta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{للقيم} \quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon) \text{ ،}$$

ومن هنا

$$\varphi(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{للقيم} \quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon). \tag{23}$$

نكوّن الدالتين المساعدتين القابلتين للتفاضل $\underline{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \bar{\varphi}(x)=\varphi(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} & \text{لقيم} \quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon) \text{ ،} \\ \bar{\varphi}(x)\geqslant\varphi(x) & \text{لقيم} \quad |x-x_0|>\eta(\varepsilon) \text{ ،} \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \underline{\varphi}(x)=\varphi(x_0)-\frac{\varepsilon}{2} & \text{لقيم} \quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon) \text{ ،} \\ \underline{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x) & \text{لقيم} \quad |x-x_0|>\eta(\varepsilon) . \end{cases}$$

فى الفترة $|x-x_0|>\eta(\varepsilon)$ تحقق الدالتان $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ الشروط (a), (b) فقط ، أما فيما عدا ذلك فهما اختياريتان . ووفقًا للمتباينة (23) يكون

$$\underline{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar{\varphi}(x). \tag{24}$$

ندرس الدالتين

$$\bar{u}(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\,\bar{\varphi}(\xi)\,d\xi,$$

$$\underline{u}(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\,\underline{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

ووفقًا لاتصال $\underline{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ تكون الدالتان $\underline{u}(x,t)$, $\bar{u}(x,t)$ متصلتين فى النقطة x_0 ، أى يوجد ذلك العدد $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$\left\{\begin{array}{l} |\bar{u}(x,t)-\bar{\varphi}(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \\ |\underline{u}(x,t)-\underline{\varphi}(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right. \text{ فى حالة } t<\delta(\varepsilon),\quad |x-x_0|<\delta(\varepsilon),$$

ومن هنا

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u}(x,t)\leqslant\bar{\varphi}(x)+\frac{\varepsilon}{2}=\varphi(x_0)+\varepsilon \\ \underline{u}(x,t)\geqslant\underline{\varphi}(x)-\frac{\varepsilon}{2}=\varphi(x_0)-\varepsilon \end{array}\right. \text{ فى حالة } t<\delta(\varepsilon),\quad |x-x_0|<\delta(\varepsilon),$$

ووفقًا لعدم سلبية الدالة $G(x,\xi,t)$ ينتج من العلاقة (24) أن

$$\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t). \tag{25}$$

ومن هنا نحصل على المتباينة

$$\varphi(x_0)-\varepsilon\leqslant u(x,t)\leqslant\varphi(x_0)+\varepsilon \text{ فى حالة } t<\delta(\varepsilon),\quad |x-x_0|<\delta(\varepsilon),$$

أو

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon \text{ فى حالة } t<\delta(\varepsilon),\quad |x-x_0|<\delta(\varepsilon),$$

وهو المطلوب إثباته . ومحدودية الدالة $|u(x,t)|$ تنتج من العلاقة (25) ومن محدودية الدالتين $\underline{u}(x,t)$, $\bar{u}(x,t)$. وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية .

فقرة ٤ : المعادلة غير المتجانسة للتوصيل الحرارى . ندرس المعادلة غير المتجانسة للتوصيل الحرارى

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{1}$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x,0)=0 \tag{26}$$

والشرطين الحديين

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

سنبحث عن حل هذه المسألة $u(x,t)$ فى صورة متسلسلة فوريبه بالدوال الذاتية (11) أى بالدوال $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$:

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{27}$$

معتبرين t عند ذلك بارامترا . لتعيين الدالة $u(x,t)$ يجب تعيين الدوال $u_n(t)$. نمثل الدالة $f(x,t)$ فى صورة المتسلسلة :

$$f(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

حيث

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\ t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi. \tag{28}$$

وبالتعويض بالصورة المقترحة للحل فى المعادلة الأصلية (1) سنحصل على :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2u_n(t)+\dot u(t)-f_n(t)\right\}=0.$$

وستتحقق هذه المعادلة إذا كانت كل معاملات المفكوك مساوية للصفر أى إذا كان

$$\dot u_n(t)=-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2u_n(t)+f_n(t). \tag{29}$$

بالاستعانة بالشرط الابتدائى للدالة $u(x,t)$

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=0,$$

نحصل على الشرط الابتدائى للدوال $u_n(t)$:

$$u_n(0)=0. \tag{30}$$

وبحل المعادلة التفاضلية العادية (29) بالشرط الابتدائى الصفرى (30) * نجد أن :

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

* انظر نهاية فقرة ٤ - بند ٣ من الباب الثانى .

وبالتعويض بالصيغة (31) للدوال $u_n(t)$ فى العلاقة (27) نحصل على حل المسألة الأصلية فى الصورة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (32)$$

وبالاستعانة بالصيغة (28) للدوال $f_n(\tau)$ وتحويل الحل الناتج (32) نحصل على

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (33)$$

حيث

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi \qquad (34)$$

تنطبق على دالة المصدر المعرفة بالعلاقة (18).

نوضح المعنى الفيزيائى للحل الناتج

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (33)$$

نفرض أن الدالة $f(\xi,\tau)$ تختلف عن الصفر فقط فى جوار صغير بقدر كاف للنقطة $M_0(\xi_0,\tau_0)$:

$$\xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_0+\Delta\xi,\qquad \tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_0+\Delta\tau.$$

والدالة $F(\xi,\tau)=c\rho f(\xi,\tau)$ هى عبارة عن كثافة المصادر الحرارية . والكمية الكلية للحرارة المنبعثة على الفترة $(0,\,l)$ خلال كل فترة تأثير المصدر (أى خلال $\Delta\tau$) تساوى

$$Q=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}c\rho f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (35)$$

نطبق نظرية القيمة المتوسطة على الصيغة

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau = G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau}) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x, t),$$

حيث

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi, \qquad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau.$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $\Delta\tau \to 0$, $\Delta\xi \to 0$ نحصل على الدالة

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta\xi \to 0 \\ \Delta\tau \to 0}} \bar{u}(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t-\tau_0), \qquad (36)$$

التي يمكن تفسيرها على أنها دالة تأثير المصدر اللحظي للحرارة المركز في النقطة ξ_0 في اللحظة τ_0 .

وإذا علمت الدالة $\frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t-\tau)$ التي تمثل تأثير وحدة المصدر اللحظي المركز فإن تأثير المصادر الموزعة باتصال بالكثافة $F(x, t) = c\rho f(x, t)$ يجب أن يعبر عنه بالعلاقة (33) كما ينتج ذلك مباشرة من المعنى الفيزيائي للدالة $G(x, \xi, t-\tau)$.

وهكذا فإن تأثير المصادر الحرارية المؤثرة في المنطقة $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ $(\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau)$ على درجات الحرارة يعطى بالصيغة :

$$G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \Delta\xi\, \Delta\tau \quad \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi, \tau) \Delta\xi\, \Delta\tau\right).$$

وإذا كانت المصادر موزعة باتصال فإنه بتجميع التأثيرات الحرارية للمصادر المؤثرة في كل المنطقة $0 \leqslant \xi \leqslant l,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t$ نحصل بعد الانتقال إلى النهاية عندما $\Delta\tau \to 0$, $\Delta\xi \to 0$ على :

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau.$$

وبذلك فانطلاقاً من المعنى الفيزيائي لدالة المصدر $G(x, \xi, t)$ كان من الممكن أن نكتب مباشرة الصيغة (33) للدالة المعبرة عن حل المعادلة غير المتجانسة .

وإذا كانت لدينا العلاقة أو الصورة التى يجب أن يعبر بها عن حل المسألة فإنه يمكن بحث شروط تطبيق هذه العلاقة بالنسبة للدالة $f(\xi,\tau)$. ولن نقوم بهذا البحث هنا .

لقد درسنا هنا المعادلات غير المتجانسة بالشروط الابتدائية الصفرية . وإذا كانت الشروط الابتدائية مختلفة عن الصفر فإنه يجب أن نضيف إلى هذا الحل حل المعادلة المتجانسة بالشرط الابتدائى المعطى $u(x,0) = \varphi(x)$ وهو الذى حصلنا عليه فى فقرة ١ .

فقرة ٥ : المسألة الحدية الأولى العامة. ندرس المسألة العامة الحدية الأولى لمعادلة التوصيل الحرارى :

عين حل المعادلة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

بالشروط الإضافية

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ندخل دالة مجهولة جديدة $v(x,t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \tag{37}$$

التى تمثل الانحراف عن دالة ما معلومة $U(x,t)$.

وهذه الدالة $v(x,t)$ ستعرف بأنها حل المعادلة

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x, t),$$

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

بالشروط الإضافية

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t), & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

نختار الدالة المساعدة $U(x,t)$ بحيث يكون

$$\bar{\mu}_1(t)=0 \quad , \quad \bar{\mu}_2(t)=0,$$

ولهذا الغرض يكفى وضع *

$$U(x, t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

وبذلك فإن تعيين الدالة $u(x,t)$ التى تعطى حل المسألة الحدية العامة يؤول إلى تعيين الدالة $v(x,t)$ التى تعطى حل المسألة الحدية بشروط حدية صفرية. وطريقة تعيين الدالة $v(x,t)$ معطاة فى فقرة ٤.

وهذه الصورة الشكلية الواردة أعلاه لحل المسائل عند وجود عدم تجانس فى المعادلة والشروط الحدية ، لا تكون دائمًا مناسبة للتعبير عن الدالة المجهولة $u(x,t)$. وتعتمد المصاعب الناشئة عند تعيين الدالة المساعدة $v(x,t)$ على الدالة $U(x,t)$ التى يبحث عن الانحراف عنها .

وكحالة خاصة للمسائل ذات عدم التجانس المستقر (stationary non-homogeniety) يكون من المناسب فصل الحل المستقر زمنيا والبحث عن الانحراف عن هذا الحل ** .

ندرس على سبيل المثال مسألة القضيب المحدود $(0, l)$ الذى يحتفظ بدرجتى حرارة ثابتتين u_1 , u_0 عند طرفيه :

$$\begin{aligned} u_t &= a^2u_{xx}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= u_0, \\ u(l, t) &= u_1. \end{aligned}$$

نبحث عن الحل فى صورة المجموع

$$u(x, t)=\bar{u}(x)+v(x, t),$$

حيث $\bar{u}(x)$ درجة الحرارة المستقرة زمنيا ، $v(x,t)$ الانحراف عن درجة الحرارة المستقرة زمنيًا .

---

* انظر الباب الثانى ، بند ٣ ، فقرة ٥ .

** انظر الباب الثانى ، بند ٣ ، فقرة ٦

للدالتين $v(x,t)$ ، $\bar{u}(x)$ سنحصل على الشروط

$$\begin{aligned}
&\bar{u}''=0, && v_t=a^2v_{xx};\\
&\bar{u}(0)=u_0, && v(x,\ 0)=\varphi(x)-\bar{u}(x)=\varphi_1(x);\\
&\bar{u}(l)=u_1, && v(0,\ t)=0,\\
& && v(l,\ t)=0.
\end{aligned}$$

ومن هنا نعين

$$\bar{u}(x)=u_0+\frac{x}{l}(u_1-u_0).$$

أما الدالة $v(x,t)$ المعرفة بالشرط الابتدائى والشروط الحدية المتجانسة فتتعين بلا صعوبة بطريقة فصل المتغيرات .

مسائل :

١ ـ استنبط معادلة لعملية تسخين سلك رفيع متجانس بواسطة تيار كهربائى إذا كان يحدث على سطح السلك تبادل حرارى مع الوسط المحيط .

٢ ـ استنبط معادلة الانتشار فى وسط يتحرك بانتظام فى اتجاه المحور x بسرعة w . ادرس حالة المتغير المستقل الواحد .

٣ ـ انطلاقا من معادلات ماكسويل مع افتراض أن $E_x=E_z=0,\ H_z=0$ وبإهمال تيارات الإزاحة (displacement current) وضح أنه فى الوسط المتجانس الموصل تحقق مركبة المجال الكهرومغناطيسى E_y المعادلة

$$\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t},$$

حيث σ موصلية الوسط ، c سرعة الضوء . استنبط المعادلة لـ H_x .

٤ ـ اشرح المعنى الفيزيائى للشروط الحدية التالية لمسائل التوصيل الحرارى والانتشار :

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \ u(0,t)=0, \qquad \text{b)}\ \ u_x(0,t)=0,\\
&\text{c)}\ \ u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\\
&\qquad u_x(l,t)+hu(l,t)=0 \qquad (h>0).
\end{aligned}$$

٥ ـ حل مسألة تبريد قضيب متجانس منتظم التسخين عندما تكون درجة الحرارة فى طرفيه صفرا مع افتراض انعدام التبادل الحرارى على السطح الجانبى .

٦ ـ درجة الحرارة الابتدائية لقضيب هى $u(x,0)=u_0=\text{const}$ عند $0<x<l$ ويحتفظ بدرجة حرارة ثابتة عند طرفيه $u(0,t)=u_1,\ u(l,t)=u_2$ عندما $0<t<\infty$. عين درجة حرارة القضيب إذا كان التبادل الحرارى على السطح الجانبى غير موجود . عين درجة الحرارة المستقرة زمنيا .

٧ ـ حل المسألة ٦ بالشروط الحدية التالية : على أحد الطرفين يحتفظ بدرجة حرارة ثابتة والطرف الآخر معزول حراريا .

٨ ـ حل مسألة تسخين سلك رفيع متجانس بتيار كهربائى ثابت إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية ودرجة الحرارة الحدية وكذلك درجة حرارة الوسط المحيط تساوى الصفر .

٩ ـ أسطوانة طولها l مملوءة بهواء درجة حرارته وضغطه هما درجة حرارة وضغط الوسط المحيط . تفتح الأسطوانة من أحد طرفيها فى اللحظة الابتدائية ، ومن الجو المحيط حيث يكون تركيز غاز معين مساويا u_0 يبدأ انتشار الغاز فى الاسطوانة . عين كمية الغاز المنتشر فى الأسطوانة خلال الفترة الزمنية t إذا كان التركيز الابتدائى للغاز فى الأسطوانة يساوى الصفر .

١٠ ـ حل المسألة ٩ بافتراض أن الطرف الأيسر للأسطوانة مغلق بحاجز شبه منفذ (semipermeable) .

١١ ـ حل مسألة تبريد قضيب متجانس ذى سطح جانبى معزول حراريا إذا كانت درجة حرارته الابتدائية $u(x, 0) = \varphi(x)$ وعند طرفيه يحدث تبادل حرارى مع الوسط المحيط ذى درجة الحرارة الصفرية . ادرس كذلك الحالة الخاصة $\varphi(x) = u_0$.

١٢ ـ حل المسألة ١١ بافتراض أن درجة حرارة الوسط المحيط تساوى U_0

١٣ ـ حل المسألة ١١ معتبرا أنه يحدث على السطح الجانبى تبادل حرارى مع الوسط المحيط الذى درجة حرارته :

(أ) تساوى الصفر (ب) ثابتة وتساوى u_1 .

١٤ ـ عين درجة الحرارة المستقرة زمنيا للقضيب مهملا التبادل الحرارى على السطح الجانبى ومعتبرا أن أحد طرفيه معزول حراريا وبالطرف الثانى موصل دفق حرارى يتغير بقانون توافقى مع الزمن .

١٥ ـ حل المسألة ١٤ معتبرا أن أحد طرفى القضيب تكون درجة حرارته صفرا ودرجة حرارة الطرف الثانى تتغير بقانون توافقى مع الزمن .

١٦ ـ القضيب $(0, l)$ مكون من قطعتين متجانستين ذواتى مقطع عرضى واحد متلامستين عند النقطة $x = x_0$ ومميزاتهما a_1, k_1 و a_2, k_2 على الترتيب . عين درجة الحرارة المستقرة فى مثل هذا القضيب (الموجات الحرارية) إذا كان أحد طرفى القضيب $(x = 0)$ يوجد عند درجة حرارة صفرية ودرجة حرارة الطرف الآخر تتغير بقانون جيبى مع الزمن .

١٧ ـ الطرف الأيسر للقضيب المركب من مسألة ١٦ يوجد عند درجة حرارة صفرية والطرف الأيمن يوجد عند درجة حرارة $u(l, t) = u_1$. ودرجة الحرارة الابتدائية للقضيب تساوى الصفر . عين درجة الحرارة $u(x, t)$ للقضيب فى النظام المتنظم (الحد الأول من المفكوك) .

١٨ ـ عين درجة الحرارة $u(x, t)$ للقضيب الذى تكون درجة حرارته الابتدائية مساوية للصفر والشروط الحدية تكون على الصورة :

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \qquad u(l, t) = B,$$

حيث $\alpha > 0$ ، A, B ثوابت .

بند ٣ ـ مسائل على المستقيم اللانهائى

فقرة ١ : انتشار الحرارة على مستقيم لانهائى . دالة المصدر لمنطقة لانهائية .

ندرس على مستقيم لانهائى المسألة بالمعطيات الابتدائية التالية (مسألة كوشى) :

عين الدالة المحدودة $u(x, t)$ المعرفة فى المنطقة $-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0$ التى تحقق معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0, \tag{1}$$

والشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

وإذا كانت $\varphi(x)$ دالة متصلة فإن تحقق الشرط الابتدائى سنفهمه بمعنى أن $u(x, t)$ تكون متصلة عند $t = 0$ أى أن

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

وكما رأينا فى فقرة ٧ ، بند ١ يكون حل معادلة التوصيل الحرارى معرفا تعريفا أحادى القيمة بشروطه الابتدائية إذا كان هذا الحل محدودا (نهائيا) . ولذا يدخل شرط المحدودية فى صياغة النظريات .

نعطى فى البداية الصورة الشكلية لحل المسألة المصاغة ، المبنية على فصل المتغيرات .

سنبحث عن الحل المحدود وغير التافه (غير الصفرى) للمعادلة (١) القابل للتعبير عنه فى الصورة :

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{3}$$

بالتعويض بالصيغة (3) فى (1) نحصل على :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

حيث λ^2 بارامتر الفصل . ومن هنا نحصل على :

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{4}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{5}$$

وبحل المعادلتين (5) , (4) نعين الحلول الخاصة للمعادلة (1) على الصورة

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \qquad (6)$$

التي تحقق شرط المحدودية . وهنا λ أى عدد حقيقي $-\infty < \lambda < \infty$ ، ولذا فني العلاقة (6) نأخذ الإشارة الموجبة ونكوّن الدالة

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda. \qquad (7)$$

وإذا أمكن حساب المشتقات الداخلة فى المعادلة (1) بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل (7) فإن الداله (7) كما هو واضح ستحقق المعادلة (1) بوصفها تراكبا للحلول الخاصة لهذه المعادلة .

وبطلب تحقق الشرط الابتدائي عند $t = 0$ نحصل على :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \qquad (8)$$

ونستعين الآن بعلاقة التحويل العكسى لتكامل فوريه

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \qquad (9)$$

بالتعويض بالعلاقة (9) فى (7) وتغيير ترتيب التكامل نحصل على :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda \right) \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (10)$$

والتكامل الداخلى فى (10) يساوى* :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \qquad (11)$$

---

* انظر كتاب بيسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الثانى طبعة دار « مير » باللغة العربية .

بالتعويض بالعلاقة (11) فى (10) نصل إلى التعبير التكاملى عن الحل المطلوب :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{12}$$

حيث

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{13}$$

الدالة $G(x, \xi, t)$ المعرفة بالعلاقة (13) كثيرا ما تسمى بالحل الأساسى لمعادلة التوصيل الحرارى .

ويمكن التأكد مباشرة من أن الدالة

$$G(x, \xi; t - t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \tag{13'}$$

تعبر عن درجة الحرارة عند النقطة x فى اللحظة الزمنية t إذا كان فى اللحظة الابتدائية $t = t_0$ فى النقطة ξ تنبعث كمية حرارة $Q = c\rho$.

الدالة $G(x, \xi, t - t_0)$ تحقق معادلة التوصيل الحرارى بالمتغيرين (x, t) * وهو ما يمكن التحقق منه بعملية التفاضل المباشر.

وكمية الحرارة الموجودة على المحور x فى اللحظة $t > t_0$ تساوى

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0)\, dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2 (t - t_0)}} =$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q = c\rho,$$

---

* بالفعل

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x - \xi}{2[a^2 (t - t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{[a^2 (t - t_0)]^{3/2}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2 (t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2 (t - t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2 (x - \xi)^2}{4[a^2 (t - t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}},$$

أى أن

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

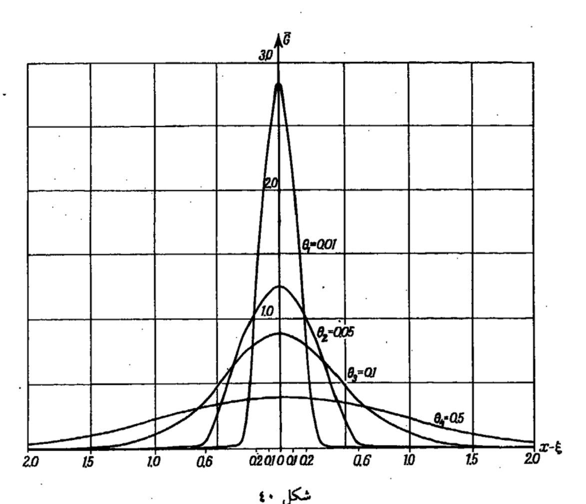
لأن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\alpha = \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right).$$

وبذلك فإن كمية الحرارة على المستقيم محل البحث لا تتغير مع مرور الزمن . والدالة $G(x, \xi, t-t_0)$ تعتمد على الزمن من خلال المتغير $\theta = a^2(t-t_0)$ فقط ومن ثم فهذه الدالة يمكن كتابتها فى الصورة :

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \qquad (13'')$$



شكل ٤٠

وفى شكل ٤٠ مبين منحنى الدالة G فى اعتمادها على x لقيم θ المختلفة . وتقع تقريبا كل المساحة المحدودة بهذا المنحنى فوق الفترة

$$(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon),$$

حيث ε عدد صغير للغاية إذا كان $\theta = a^2(t - t_0)$ عددا صغيرا بشكل كاف. ومقدار هذه المساحة مضروبا فى $c\rho$ يساوى كمية الحرارة الواصلة فى اللحظة الابتدائية. وبذلك فلقيم $t - t_0 > 0$ الصغيرة تكون الحرارة كلها تقريبا مركزة فى جوار صغير للنقطة ξ. ومما سبق ذكره ينتج أنه فى اللحظة t_0 تكون كل كمية الحرارة مركزة فى النقطة ξ.

وبدراسة تغير درجة الحرارة فى نقطة مثبتة $x = \xi + h$ مع مرور الزمن عندما $h = 0$ أى عندما $x = \xi$ نحصل على:

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

وبذلك فإن درجة الحرارة فى هذه النقطة حيث تنبعث الحرارة تكون كبيرة (عالية) بلا حدود لقيم θ الصغيرة.

وإذا كانت $x \neq \xi$ أى $h \neq 0$ فإن الدالة G تمثل فى صورة حاصل ضرب عاملين

$$G_{x\neq\xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right] e^{-h^2/4\theta}.$$

والعامل الثانى فى حاصل الضرب هذا أصغر من الواحد الصحيح: وعند قيم θ الكبيرة يكون ≈ 1، أما لقيم θ الصغيرة فيكون ≈ 0. ومن هنا ينتج أن $G_{x\neq\xi} = G_{x=\xi}$ لقيم θ الكبيرة، $G_{x\neq\xi} \ll G_{x=\xi}$ لقيم θ الصغيرة. وكلما كان h صغيرا، أى كلما كانت x اقرب إلى ξ، كلما كان العامل الثانى أكبر. ومنحنيا الدالتين $G_{x\neq\xi}$, $G_{x=\xi}$ عندما $h_2 < h_1$ مبينان على الرسم فى شكل ٤١.

شكل ٤١

وليس من الصعب ملاحظة أن

$$\lim_{\theta\to 0} G_{x\neq\xi} = 0.$$

بفك عدم التحديد نعين (باستخدام قاعدة هوبيتال):

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-h^2/4\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^{-3/2}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{h^2/4\theta}} = 0.$$

وتوضح العلاقة (13′) أنه فى أية نقطة x تكون درجة الحرارة ، الناتجة بالمصدر اللحظى النقطى المؤثر فى اللحظة الابتدائية $t = 0$ ، مختلفة عن الصفر فى أية لحظات زمنية مهما كانت صغيرة . وكان من الممكن تفسير هذه الحقيقة بأنها نتيجة لانتشار درجة الحرارة بسرعة لانهائية . غير أن ذلك يتناقض مع التصور الجزيئى الكينيتى لطبيعة الحرارة . وهذا التناقض ينتج نتيجة أننا استعنا عند استنباط معادلة التوصيل الحرارى الوارد أعلاه بالتصور الظواهرى (phenomenal) لانتشار الحرارة الذى لا يأخذ فى الاعتبار قصورية عملية حركة الجزيئات .

والآن نوضح شروط قابلية العلاقة (12) للتطبيق .

نثبت أن العلاقة

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (12')$$

التى تسمى بتكامل بواسون تمثل لأية دالة محدودة $M > |\varphi(\xi)|$ عند $t > 0$ الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى الملامس باتصال عند $t = 0$ للدالة $\varphi(x)$ فى كل نقط اتصال هذه الدالة .

نثبت فى البداية المأخوذة التالية (المبدأ المعمم للتراكب) :

إذا كانت الدالة $U(x, t, \alpha)$ تحقق بالمتغيرين (x, t) المعادلة التفاضلية الخطية

$$L(U) = 0$$

لأى قيمة مثبتة للبارامتر α فإن التكامل

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

يكون أيضا حلا لنفس المعادلة $L(u) = 0$ إذا كانت المشتقات الداخلة فى المؤثر التفاضلى الخطى $L(U)$ يمكن حسابها بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل .

وإثبات المأخوذة هذه بسيط للغاية . فالمؤثر التفاضلى الخطى $L(U)$ هو عبارة عن مجموع مشتقات الدالة U بمعاملات ما تعتمد على x و t . وعملية تفاضل الدالة u يمكن إجراؤها حسب الفرض تحت علامة التكامل . والمعاملات أيضا

يمكن إدخالها تحت علامة التكامل. ومن هنا ينتج أن

$$L(u) = \int L(U(x, t, \alpha))\, \varphi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

أى أن الدالة $u(x,t)$ تحقق المعادلة $L(u) = 0$.

ونذكر القارئ بالشروط الكافية لقابلية التفاضل تحت علامة التكامل المعتمد على بارامتر.

الدالة

$$F(x) = \int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha$$

تكون لقيم الحدين b , a النهائية قابلة للتفاضل تحت علامة التكامل إذا كان $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ يعتبر دالة متصلة فى المتغيرين α , x فى منطقة تغيرهما (انظر كتاب بيسكونوف « التفاضل والتكامل » الجزء الأول والثانى باللغة العربية طبعة دار « مير ») .

وليس من الصعب أيضا أن نلاحظ أن الدالة

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

لقيم الحدين b , a النهائية تكون قابلة للتفاضل تحت علامة التكامل بنفس الشروط المفروضة على الدالة $f(x,\alpha)$ ولأية دالة محدودة (وحتى قابلة للتكامل مطلقا) $\varphi(\alpha)$. وإذا كان حدا التكامل لانهائيين فإن هذه الحالة تتطلب ضرورة التقارب المنتظم للتكامل الناتج بعد تفاضل الدالة المكاملة بالنسبة إلى البارامتر (انظر المرجع السابق).

وهذه الملاحظات تسرى أيضا على التكاملات المكررة المعتمدة على البارامترات.

وللمعادلات الخطية $L(u) = 0$ يتحقق مبدأ التراكب الذى ينحصر فى أن الدالة

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x, t),$$

الممثلة فى صورة مجموع عدد محدود من الحلول الخاصة ، تعتبر أيضا حلا للمعادلة .

وإذا كان لدينا الحل $u(x, t, \alpha)$ المعتمد على البارامتر فإن المجموع التكاملى

$$\sum u(x, t, \alpha_n) C_n \qquad (C_n = \varphi(\alpha_n) \Delta\alpha) \tag{14}$$

يعتبر أيضا حلا للمعادلة $L(u) = 0$. والمأخوذة المثبتة مثلها مثل المأخوذة المثبتة فى صفحة ١٠٨ تؤكد الشروط التى عندها تعتبر نهاية المجموع (14) وهى فى حالتنا تساوى

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha,$$

حلا للمعادلة $L(u) = 0$ أيضا . ومن جهة النظر هذه من الطبيعى أن تسمى المأخوذة المثبتة كالمأخوذة التى فى صفحة ١٠٨ بالمبدأ المعمم للتراكب .

نعود إلى دراسة التكامل (12′) . نثبت أولا أنه إذا كانت الدالة $\varphi(x)$ محدودة $|\varphi(x)| < M$. فإن التكامل (12′) يتقارب ويعبر عن دالة محدودة . بالفعل

$$|u(x, t)| < M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M \quad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

وذلك لأن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

وبعد ذلك نثبت أن التكامل (12′) يحقق معادلة التوصيل الحرارى عند $t > 0$. ولهذا الغرض يكفى إثبات أن مشتقات هذا التكامل عند $t > 0$ يمكن حسابها بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل .

وفى حالة حدود التكامل المحدودة (النهائية) يكون ذلك قانونيا لأن كل مشتقات الدالة

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

عندما $t > 0$ تكون متصلة . ولإمكانية إجراء التفاضل تحت علامة التكامل فى حالة حدود التكامل اللانهائية يكفى التأكد من التقارب المنتظم للتكامل الناتج بعد

إجراء التفاضل تحت علامة التكامل . نجرى هذا البحث على مثال المشتقة الأولى بالنسبة إلى x .

وهكذا فلاثبات قابلية تفاضل الدالة (12) بالنسبة إلى x وكذلك المتساوية

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(G(x,\ \xi,\ t))\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل فى الطرف الأيمن للمتساوية السابقة . وعند ذلك فلإثبات قابلية التفاضل فى النقطة $(x_0,\ t_0)$. يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل فى منطقة ما من مناطق قيم المتغيرات تحتوى القيمتين محل البحث $(x_0,\ t_0)$. على سبيل المثال فى المنطقة

$$t_1\leqslant t_0\leqslant t_2,\quad |x|\leqslant\bar{x}.$$

والشرط الكافى للتقارب المنتظم للتكامل (مثل اختبار التقارب المنتظم للمتسلسلة) يعتبر هو وجود الدالة الموجبة $F(\xi)$ التى لا تعتمد على البارامترين $(x,\ t)$ والتى تحد من أعلى الدالة

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\right|\leqslant F(\xi),\quad \xi>\bar{x},\quad \xi<-\bar{x},\qquad (15)$$

ويتقارب تكاملها :

$$\int_{x_1}^{\infty}F(\xi)\,d\xi<\infty,\qquad \int_{-\infty}^{x_1}F(\xi)\,d\xi<\infty.\qquad (15')$$

ويرمز المقدار x_1 إلى عدد ما تتحقق ابتداء منه المتباينة (15) .

نعين التقدير من أعلى للقيمة المطلقة المكاملة فى علاقة $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,\ \xi,\ t)\right|\cdot|\varphi(\xi)|=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{|\xi-x|}{2\,[a^2t]^{3/2}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}|\varphi(\xi)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{|\xi|+\bar{x}}{2\,[a^2t_1]^{3/2}}\,e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}}=F(\xi)\qquad (16)$$

لقيم $\xi>\bar{x}$ ولأى $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, $|x|\leqslant\bar{x}$. لا يصعب التأكد من تقارب التكامل $F(\xi)$ للدالة (15') . فالتكامل

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{|\xi| + \bar{x}}{2\,[a^2t_1]^{3/2}}\,e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}}\,d\xi = \int_{x_1-\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2\,[a^2t_1]^{3/2}}\,e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2t_2}}\,d\xi_1$$

$$(\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

يتقارب لأنه يوجد تحت علامة التكامل عامل على الصورة $(a\xi + b)\,e^{-c\xi^2}$. ومن هنا نستنتج أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x,\ \xi,\ t)\,\varphi(\xi)\,d.$$

وبالمثل تماما يتم إثبات إمكانية حساب كل المشتقات الباقية بالتفاضل تحت علامة التكامل. وبذلك أثبتنا أن الدالة (12′) تحقق معادلة التوصيل الحرارى.

وننتقل الآن إلى الخاصية الأساسية للتكامل (12′) وبالذات نثبت أن

$$u(x,\ t) \to \varphi(x_0) \quad \text{عندما} \quad x \to x_0\ ,\ t \to 0$$

فى جميع نقط اتصال الدالة $\varphi(x)$.

وهكذا نفرض أن $\varphi(x)$ دالة متصلة فى نقطة ما x_0. يجب أن نثبت أن

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} u(x,\ t) = \varphi(x_0),$$

أى مهما كان العدد $0 < \varepsilon$ يمكن تعيين ذلك العدد $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|u(x,\ t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

عندما

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon)\ ,\quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

ووفقا للاتصال المفترض للدالة $\varphi(x)$ فى النقطة x_0، يوجد ذلك العدد $\eta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{17}$$

عندما

$$|x - x_0| < \eta.$$

وبتقسيم فترة التكامل إلى أجزاء نعبر عن $u(x, t)$ فى صورة مجموع ثلاثة حدود :

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\dots d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_2}^{\infty}\dots d\xi=u_1(x, t)+u_2(x, t)+u_3(x, t), \quad (18)$$

حيث

$$x_1=x_0-\eta \quad , \quad x_2=x_0+\eta.$$

والحد الأساسى فى هذا المجموع u_2 يمكن التعبير عنه فى الصورة :

$$u_2(x, t)=\frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d\xi=I_1+I_2.$$

والتكامل I_1 يحسب مباشرة :

$$I_1=\frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{a^2t}}d\xi=\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

حيث

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}, \quad d\alpha=\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}. \quad (19)$$

وبمجرد أن يصبح $|x-x_0|<\eta$ يصبح الحد العلوى للتكامل موجبا والحد السفلى سالبا . وعندما $t\to 0$ يؤول الحد العلوى إلى $+\infty$ والسفلى إلى $-\infty$. ومن هنا ينتج أن

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} I_1=\varphi(x_0).$$

وبذلك يمكن تعيين ذلك العدد δ_1 بحيث إن

$$|I_1-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{6}, \quad (20)$$

عندما يكون فقط

$$|x-x_0|<\delta_1 \quad , \quad |t|<\delta_1.$$

نوضح أن التكاملات u_3 , u_1 , I_2 صغيرة . نقدر قبل كل شيء التكامل I_2 :

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\, d\xi.$$

ومن المتساوية (18) يتضح أنه عندما

$$x_1<\xi<x_2$$

تتحقق المتباينة

$$|\xi-x_0|<\eta.$$

وبالاستعانة بالمتباينة (17) وكذلك بأن

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2}\, d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 1,$$

مهما كان العددان x'' , x' نحصل على :

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{21}$$

حيث يعرف المتغير الجديد α بالعلاقة (19) . نقدر

$$|u_3(x,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \to 0 \quad , \quad \begin{matrix} x\to x_0 \\ t\to 0 \end{matrix} \tag{22}$$

وبالمثل

$$|u_1(x,t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \to 0 \quad , \quad \begin{matrix} x\to x_0 \\ t\to 0, \end{matrix} \tag{23}$$

وحيث إنه عندما $x \to x_0$ فإن $x_2 - x > 0$ و $x_1 - x < 0$ وعندما $t \to 0$ فإنه فى الحدين الأخيرين فى (23) , (22) تؤول النهاية السفلى للتكامل والنهاية العليا له على الترتيب إلى $-\infty$, $+\infty$. وبالتالى يمكن تعيين ذلك العدد δ_2 بحيث إن

$$|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{24}$$

إذا كان فقط

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad , \quad |t| < \delta_2.$$

وبالاستعانة بالتقديرين الناتجين أعلاه (23) , (22) نحصل على :

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leqslant |u_1 + [I_1 - \varphi(x_0)] + I_2 + u_3| \leqslant$$
$$\leqslant |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{25}$$

إذا كان فقط

$$|x - x_0| < \delta \quad , \quad |t| < \delta,$$

حيث δ يساوى أصغر العددين δ_2 ، δ_1 .

وبذلك أثبتنا أن الدالة

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{12'}$$

محدودة وتحقق معادلة التوصيل الحرارى والشرط الابتدائى .

وإذا أعطيت القيمة الابتدائية ليس عند $t = 0$ وإنما عند $t = t_0$ فإن صيغة $u(x, t)$ تأخذ الشكل :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{12''}$$

ووحدانية الحل الناتج للدالة المتصلة $\varphi(x)$ تنتج من النظرية المثبتة فى بند ٢ ، فقرة ٣ . وإذا كانت الدالة الابتدائية $\varphi(x)$ لها عدد محدود من نقط الانفصال فإن التكامل $(12'')$ يمثل الحل المحدود للمعادلة (1) المتصل فى كل النقط فيما عدا نقط انفصال الدالة $\varphi(x)$ * .

* بالاستعانة بالطريقة المشروحة فى بند ٢ ، فقرة ٣ يمكن التأكد من أن الدالة $u(x, t)$ تتحدد بالشروط المذكورة تحديدا أحادى القيمة .

ندرس كمثال المسألة التالية :

عين حل معادلة التوصيل الحرارى إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية (عند $t = t_0 = 0$) لها قيمتان ثابتتان ولكنهما مختلفتان عند $x < 0$ و $x > 0$ أى

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & , \quad x > 0, \\ T_2 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

بالاستعانة بالعلاقة (12') نحصل على حل المسألة فى الصورة :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha, \quad (26)$$

لأن

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2}\, d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{0} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

وكحالة خاصة إذا كان

$$T_2 = 0, \quad T_1 = 1,$$

فإن

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right) \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

إن المقطع الجانبى لدرجة الحرارة فى اللحظة t يعطى بالمنحنى

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

حيث z هى الإحداثى الأفقى للنقطة التى تحدد عندها درجة الحرارة إذا أخذنا كوحدة الطول فى ارتباطها بالزمن t القيمة $2\sqrt{a^2t}$. وتكوين (رسم) هذا المنحنى لا يشكل صعوبة لأن التكامل

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

الذى يسمى عادة بتكامل الأخطاء يقابلنا كثيرا فى نظرية الاحتمالات ويوجد له جداول مفصلة*

ويمكن كتابة العلاقة (26) لأية قيمتين اختياريتين T_2 , T_1 على الصورة :

$$u(x,\ t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

ومن هنا يتضح أنه فى النقطة $x=0$ تكون درجة الحرارة طول الوقت ثابتة ومساوية لنصف مجموع قيمتى درجة الحرارة الأبتدائيتين على اليسار وعلى اليمين وذلك لأن $\Phi(0)=0$.

وحل المعادلة غير المتجانسة

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t)\qquad(-\infty<x<\infty,\ t>0)$$

بالشروط الابتدائية الصفرية

$$u(x,\ 0)=0,$$

من الواضح انه يجب التعبير عنه بالعلاقة

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\ \xi,\ t-\tau)f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{27}$$

كما ينتج ذلك من معنى الدالة $G(x,\xi,t)$ (انظر فقرة ٤ ، بند ٢) . ولن نقوم

---

* انظر الجداول فى نهاية الجزء الثانى من الكتاب .

بدراسة هذه العلاقة بالتفصيل وكذلك شروط تطبيقها التى يجب أن تحققها الدالة $f(x, t)$.

فقرة ٢ : المسائل الحدية للمستقيم نصف اللانهائى. كما سبق أن ذكرنا فى بند ١ ، فقرة ٤ ، عندما يهمنا توزيع درجات الحرارة بالقرب من أحد طرفى القضيب ويكون تأثير الطرف الآخر غير جوهرى فإننا نعتبر أن هذا الطرف (الثانى) موجود فى المالانهاية . وهذا يؤدى إلى مسألة تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

على المستقيم نصف اللانهائى $0 < x$ لقيم $0 < t$ التى تحقق الشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

والشرط الحدى الذى يؤخذ وفقا لطبيعة النظام الحدى المعطى على إحدى الصور التالية :

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{(المسألة الحدية الأولى) ،}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t) \quad \text{(المسالة الحدية الثانية) ،}$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda[u(0, t) - \theta(t)] \quad \text{(المسألة الحدية الثالثة) .}$$

وفى المستقبل سنكتفى بالبحث التفصيلى للمسألة الحدية الأولى فقط التى تنحصر فى تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى بالشروط الإضافية التالية :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \tag{28}$$

ولكى تحدد شروط المسألة حلا وحيدا لا بد من إضافة بعض الشروط الأخرى فى المالانهاية . نتطلب بمثابة الشرط الإضافى أن تكون الدالة $u(x, t)$ محدودة فى كل مكان :

$$|u(x, t)| < M \ , \ 0 < x < \infty \ , \ t \geqslant 0,$$

حيث M ثابت ما . ومن هنا ينتج أن الدالة الابتدائية $\varphi(x)$ يجب أيضا أن تحقق شرط المحدودية $|\varphi(x)| < M$.

وحل المسألة المصاغة يمكن التعبير عنه فى صورة المجموع

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

حيث $u_1(x,t)$ تعبر فقط عن تأثير الشروط الابتدائية و $u_2(x,t)$ تعبر عن تأثير الشرط الحدى فقط . ويمكن تعيين هاتين الدالتين كحلين للمعادلة (1) يحققان الشروط التالية :

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0 \text{،} \tag{28'}$$

$$u_2(x, 0) = 0, \qquad u_2(0, t) = \mu(t). \tag{28''}$$

ومن الواضح أن مجموع هاتين الدالتين سيحقق الشرطين (28) . نثبت فى البداية مأخوذتين متعلقتين بالدالة $u(x,t)$ المعرفة بتكامل بواسون

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{29}$$

١ ـ إذا كانت الدالة $\psi(x)$ دالة فردية أى أن

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

فإن الدالة (29)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

تؤول إلى الصفر عندما $x = 0$:

$$u(0, t) = 0.$$

وعند ذلك يفترض بالطبع أن التكامل المعرف للدالة $u(x,t)$ متقارب . وذلك يتحقق إذا كانت $\psi(x)$ محدودة . والدالة المكاملة فى التكامل

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

دالة فردية بالنسبة إلى ξ لأنها تعتبر حاصل ضرب دالة فردية فى دالة زوجية . والتكامل المأخوذ لدالة فردية بحدى تكامل متماثلين بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوى الصفر وبالتالى فإن

$$u(0, t) = 0,$$

وهو ما يثبت المأخوذة .

٢ ـ إذا كانت الدالة $\psi(x)$ دالة زوجية أى أن

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

فإن مشتقة الدالة $u(x, t)$ من العلاقة (29) تكون مساوية للصفر عندما $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

لجميع قيم $t > 0$.

بالفعل

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \psi(\xi)\, d\xi \left.\vphantom{\int}\right|_{x=0} = 0,$$

لأنه عند $x = 0$ تكون الدالة المكاملة دالة فردية إذا كانت $\psi(\xi)$ دالة زوجية .

وننتقل الآن الى تكوين الدالة $u_1(x, t)$ التى تحقق الشروط (28′) .

ندرج دالة مساعدة $U(x, t)$ معرفة على المستقيم اللانهائى $-\infty < x < \infty$ وتحقق المعادلة وكذلك الشروط

$$U(0, t) = 0,$$
$$U(x, 0) = \varphi(x) \qquad x > 0.$$

وهذه الدالة يمكن بمساعدة المأخوذة تعريفها بواسطة الدالة الابتدائية $\Psi(x)$ التى تنطبق على $\varphi(x)$ فى حالة $x > 0$ وتعتبر امتدادا فرديا للدالة $\varphi(x)$ لقيم $x < 0$ أى

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0, \\ -\varphi(-x) & x < 0, \end{cases}$$

ومن ثم فإن :

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Psi(\xi)\, d\xi.$$

وبدراسة قيم الدالة $U(x, t)$ فقط فى المنطقة التى تهمنا $x \geqslant 0$ نحصل على :

$$u(x, t) = U(x, t) \quad , \quad x \geqslant 0.$$

وبالاستعانة بتعريف الدالة $\Psi(x)$ سنحصل على :

$$U(x,t)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Psi(\xi)\,d\xi=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

علما بأننا أجرينا فى التكامل الأول التعويض $\xi'=-\xi$ واستعنا بالمتساوية

$$\Psi(\xi)=-\varphi(-\xi)=-\varphi(\xi').$$

وبتجميع التكاملين معا نحصل على الدالة المطلوبة

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (30)$$

فى صورة لا تحتوى على الدوال المساعدة . ونشير إلى أنه عندما $x=0$ تؤول الصيغة بين القوسين الكبيرين إلى الصفر ويكون $u_1(0,t)=0$.

وبالاستعانة بالمأخوذة ٢ لا يصعب التأكد من أن حل معادلة التوصيل الحرارى بالشرط الحدى المتجانس من النوع الثانى $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0,t)=0$ والشرط الابتدائى $\bar{u}_1(x,0)=\varphi(x)$ يعبر عنه على الصورة :

$$\bar{u}_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (30')$$

نطبق العلاقة الناتجة لحل مسألة تبريد قضيب مسخن بانتظام يحتفظ على حدوده بدرجة حرارة ثابتة نعتبرها مساوية للصفر . وتنحصر المسألة فى تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشرطين

$$v_1(x,t_0)=T, \qquad v_1(0,t)=0.$$

والأخذ فى الاعتبار أن الشرط الابتدائى معطى لا عندما $t=0$ وإنما عندما $t=t_0$ نحصل بدلا من العلاقة (30) على :

$$v_1(x,t)=\frac{T}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right\}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \qquad (31)$$

وبتقسيم التكامل إلى حدين وإدخال المتغيرين

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

نحصل على

$$v_1(x, t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \tag{31}$$

حيث

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

هو تكامل الأخطاء .

وننتقل الآن إلى البحث عن الدالة $u_2(x,t)$ التى تمثل الجزء الثانى من حل المسألة الحدية الأولى .

نفرض أن

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const.}$$

والدالة

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \tag{32}$$

تعتبر حلا لمعادلة التوصيل الحرارى يحقق الشرطين

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

ومن هنا ينتج أن الدالة

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right)\right] \tag{33}$$

تعتبر هى الدالة المطلوب تعيينها لأنها تحقق نفس المعادلة والشرطين

$$v(x, t_0) = 0 \quad (x > 0) \quad , \quad v(0, t) = \mu_0 \quad (t > t_0).$$

نعبر عن $v(x, t)$ فى الصورة

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t - t_0),$$

حيث

$$U(x, t-t_0) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \tag{34}$$

هى حل نفس المسألة كالدالة $v(x,t)$ عندما $\mu_0 = 1$.

ووفقا للتعريف يكون للدالة $U(x, t-t_0)$ معنى فقط عندما $t \geqslant t_0$. نكمل تعريف هذه الدالة بفرض

$$U(x, t-t_0) \equiv 0 \quad , \quad t < t_0.$$

ومن الواضح أن هذا التعريف يتفق مع قيمة الدالة $U(x,t)$ عندما $t = 0$ والدالة المعرفة بهذه الطريقة ستحقق معادلة التوصيل الحرارى لجميع قيم t عندما $x > 0$. والقيمة الحدية لهذه الدالة (عندما $x = 0$) تعتبر دالة متدرجة (step function) تساوى الصفر عندما $t < t_0$ وتساوى الواحد الصحيح عندما $t > t_0$. والدالة $U(x,t)$ تقابلنا كثيرا فى التطبيقات وتعتبر حلقة مساعدة لتعيين الدالة $u_2(x,t)$.

ندرس المسألة المساعدة الثانية التى تنحصر فى تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى بالشروط الابتدائية والحدية التالية :

$$v(x, t_0) = 0, \qquad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & , \quad t_0 < t < t_1, \\ 0 & , \quad t > t_1. \end{cases}$$

ويمكن التحقق مباشرة من أن

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t-t_0) - U(x, t-t_1)].$$

وبوجه عام إذا كانت الدالة الحدية $\mu(t)$ معطاة فى صورة دالة متدرجة

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & , \quad t_0 < t \leqslant t_1, \\ \mu_1 & , \quad t_1 < t \leqslant t_2, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \mu_{n-1} & , \quad t_{n-1} < t \leqslant t_n, \end{cases}$$

فإنه بتحليل الموضوع تماما كما سبق نجد أن حل المسألة الحدية بمثل هذه الدالة $\mu(t)$ يمكن كتابته على الصورة :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i [U(x, t-t_i) - U(x, t-t_{i+1})] + \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}). \tag{35}$$

وبالاستعانة بنظرية التغير المحدود نحصل على :

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{n-2} \mu_l \frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t}\bigg|_{\tau_l} \Delta\tau + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) \quad (36)$$

لقيم $t_l \leqslant \tau_l \leqslant t_{l+1}$.

نتتقل الآن إلى مسألة تعيين $u(x,t)$ حل معادلة التوصيل الحرارى بالشرط الابتدائى الصفرى والشرط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \qquad (t > 0),$$

حيث $\mu(t)$ أية دالة متقطعة الاتصال . والحل التقريبى لهذه المسألة يسهل الحصول عليه فى الصورة (36) إذا استبدلنا الدالة $\mu(t)$ بدالة متقطعة الثبات . وبالانتقال إلى النهاية عند تناقص فترات ثبات الدالة المساعدة نجد أن نهاية المجموع (36) تكون مساوية :

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\mu(\tau)\, d\tau,$$

وذلك لأنه عندما $x > 0$ يكون

$$\lim_{t-t_{n-1}\to 0} \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}) = 0.$$

ومن الواضح أن الحل المطلوب $u_2(x,t)$ للمسألة الثانية يجب أن يساوى

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\, d\tau. \quad (37)$$

ولن نتوقف عند تفصيل قانونية الانتقال إلى النهاية وتوضيح شروط تطبيق هذه العلاقة بالنسبة إلى الدالة $\mu(\tau)$.

ولا يصعب التأكد من أن

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^2 x}{[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} =$$

$$= -2a^2 \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} \quad \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\right).$$

وبذلك فالحل المطلوب تعيينه فى حالة الدالة الاختيارية $\mu(t)$ يمكن التعبير عنه على الصورة

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau)\, d\tau$$

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau . \qquad (38)$$

ونشير إلى أنه فى خلال عملية الحصول على العلاقة (38) لم نستخدم فى أى مكان الخواص لمعادلة التوصيل الحرارى فيما عدا خطيتها . كما أننا لم نستخدم أيضا العلاقة التحليلية للدالة $U(x, t)$ وإنما استخدمنا فقط أنها تحقق الشروط الحدية والابتدائية :

$$U(0, t) = 1 \quad , \quad t > 0,$$
$$U(x, 0) = 0 \quad , \quad x > 0$$

أو

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0, \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

ومن الواضح أنه إذا كنا نريد حل أية معادلة تفاضلية خطية بالشرط الحدى

$$u(0, t) = \mu(t) \qquad (t > 0),$$

والشروط الابتدائية الصفرية والشروط الحدية الإضافية الصفرية إن وجدت (مثلا عند $x = l$) فإن حل مثل هذه المسألة يمكن التعبير عنه فى الصورة

$$u(x, t) = \int_{0}^{t} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau, \qquad (39)$$

حيث $U(x, t)$ حل المسألة الحدية المماثلة عندما

$$U(0, t) = 1.$$

---

* هذا التعبير عن حل المسألة الحدية الأولى بالشروط الابتدائية الصفرية معطى هنا لسهولة المقارنة مع حل نفس هذه المسألة الناتج فى الباب الثانى من الكتاب الثانى ، بند ٤ بطريقة أخرى .

والمبدأ المصاغ هنا يسمى بمبدأ دوهاميل ويوضح أن الصعوبة الأساسية عند حل المسائل الحدية يشكلها ثبات القيمة الحدية . وإذا حلت المسألة الحدية بالقيمة الحدية الثابتة فإن حل المسألة الحدية بالقيمة الحدية المتغيرة يعطى بالعلاقة (39) . وكثيرا ما يستخدم هذا المبدأ عند حل كثير من المسائل الحدية بتحويل الحل إلى الحل للشرط الحدى الثابت فقط دون ذكر أن حل المسألة الحدية بالشرط المتغير $\mu(t)$ يعطى بالعلاقة (39) .

ومجموع الدالتين

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

يعطى حل المسألة الحدية الأولى للمستقيم نصف اللانهائى للمعادلة المتجانسة .

وبالاستعانة بالعلاقة (27) فقرة ١ ، بند ٣ ومبدأ الاستكمال غير الزوجى لا يصعب التأكد من أن حل المعادلة غير المتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < \infty, \ t > 0)$$

للشرط الابتدائى الصفرى والشرط الحدى الصفرى $(u(0, t) = 0)$ يعطى بالعلاقة

$$u_3(x, t) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \quad (40)$$

والمجموع

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

يعطى حل المسألة الحدية الأولى

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

بند ٤ ـ المسائل بدون شروط ابتدائية

إذا كانت عملية التوصيل الحرارى تدرس فى لحظة بعيدة بعدا كافيا عن اللحظة الابتدائية فإن تأثير الشروط الابتدائية لا ينعكس على توزيع درجة الحرارة فى اللحظة التى تم فيها ملاحظة ودراسة العملية . وفى هذه الحالة تطرح مسألة

تعيين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشروط الحدية من أحد الأنواع الثلاثة المعطاة لجميع قيم $t > -\infty$. وإذا كان القضيب محدودا تعطى الشروط الحدية على طرفيه الاثنين . وللقضيب نصف اللانهائى يعطى شرط حدى واحد فقط .

ندرس المسألة الحدية الأولى للقضيب نصف اللانهائى :

عين الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى فى المنطقة $0 < x$ الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu(t), \tag{1}$$

حيث $\mu(t)$ دالة معطاة . ويفترض أن الدالتين $u(x, t)$، $\mu(t)$ محدودتان فى كل مكان أى أن

$$|u(x, t)| < M,$$
$$|\mu(t)| < M.$$

وكما سنوضح فيما بعد تعرف الدالة $u(x, t)$ تعريفا أحادى القيمة . نأخذ حالة الشرط الحدى الأكثر ذيوعا :

$$\mu(t) = A\cos\omega t. \tag{2}$$

وقد بحث هذه المسألة فورييه وطبقت لأول مرة لتعيين الذبذبات الحرارية للتربة* .

نكتب الشرط الحدى على الصورة

$$\mu(t) = Ae^{i\omega t}. \tag{2'}$$

ومن خطية معادلة التوصيل الحرارى ينتج أن الجزء الحقيقى والجزء التخيلى لحل مركب ما لمعادلة التوصيل الحرارى يحقق كل منهما على حدة نفس هذه المعادلة .

وإذا عين حل معادلة التوصيل الحرارى الذى يحقق الشرط (2') فإن جزءه الحقيقى يحقق الشرط (2) والجزء التخيلى يحقق الشرط

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A\sin\omega t.$$

---

* انظر الملحق ١ .

وهكذا ندرس المسألة :

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad (3)$$
$$u(0, t) = Ae^{i\omega t}.$$

وسنبحث عن حلها فى الصورة :

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \qquad (4)$$

حيث β , α ثابتان لم يحددا بعد .

بالتعويض عن الصيغة (4) فى المعادلة (3) والشرط الحدى نجد أن

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta, \quad \beta = i\omega,$$

ومن هنا

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} =$$
$$= \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right].$$

وللدالة $u(x, t)$ لدينا

$$u(x, t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + i\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + \omega t\right)}. \qquad (5)$$

والجزء الحقيقى لهذا الحل

$$u(x, t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + \omega t\right) \qquad (6)$$

يحقق معادلة التوصيل الحرارى والشرط الحدى (2) . والعلاقة (6) وفقا لاختيار الإشارة لا تحدد دالة واحدة فقط وإنما تحدد دالتين ، ولكن الدالة المناظرة للإشارة السالبة هى فقط التى تحقق شرط المحدودية . وبذلك فحل المسألة المطروحة نحصل عليه فى الصورة :

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x + \omega t\right). \qquad (7)$$

وبالمثل تحل المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم المحدود :

$$\left.\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A\cos\omega t, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

وبإعادة كتابة الشرط الحدى فى الصورة :

$$\hat{u}(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \quad \hat{u}(l, t) = 0 ,$$

نبحث عن الحل فى الصورة :

$$\hat{u}(x, t) = X(x)\, e^{-i\omega t}. \qquad (9)$$

وبالتعويض عن هذه الصيغة فى المعادلة (8) نحصل للدالة $X(x)$ على المعادلة

$$X'' + \frac{i\omega}{a^2} X = 0 \quad \text{أو} \quad X'' + \gamma^2 X = 0 \text{ ،}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,(1 + i) \qquad (10)$$

والشروط الإضافية

$$X(0) = A, \quad X(l) = 0. \qquad (11)$$

ومن هنا نحصل للدالة $X(x)$ على

$$X(x) = A\frac{\sin\gamma(l - x)}{\sin\gamma l} = X_1(x) + iX_2(x), \qquad (12)$$

حيث X_2 ، X_1 الجزءان الحقيقى والتخيلى للدالة $X(x)$. وللدالة $\hat{u}(x, t)$ نحصل على الصيغة

$$\hat{u}(x, t) = A\frac{\sin\gamma(l - x)}{\sin\gamma l}\, e^{-i\omega t}. \qquad (13)$$

وبفصل الجزء الحقيقى للدالة $\hat{u}(x, t)$ نعين حل المسألة الأصلية بدون شروط ابتدائية فى الصورة :

$$u(x, t) = X_1(x)\cos\omega t + X_2(x)\sin\omega t. \qquad (14)$$

ولا نعطى هنا الصيغة الصريحة لكل من الدالتين X_2 ، X_1 رغم أن ذلك لا يصعب عمله .

وإذا كانت الدالة الحدية عبارة عن تركيبة من التوافقيات ذات الترددات المختلفة فإن حل هذه المسألة يمكن الحصول عليه بوصفه تراكبا للحلول المناظرة للتوافقيات كل على حدة .

نثبت وحدانية حل المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم نصف اللانهائي . سننطلق من العلاقة

$$u(x,t)=\frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}u(0,\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right\}u(\xi,t_0)\,d\xi=I_1+I_2 \quad (15)$$

$$(t\geqslant t_0),$$

التى تعبر عن أى حل محدود لمعادلة التوصيل الحرارى بدلالة قيمته الابتدائية $u(x,t_0)$ وقيمته الحدية $u(0,t)=\mu(t)$ فى المنطقة $t\geqslant t_0$ ، $x\geqslant 0$.

نوضح أن

$$\lim_{t_0\to-\infty}I_2(x,t)=0, \quad (16)$$

إذا كان فقط

$$|u(x,t)|<M$$

لأى t . بالفعل ،

$$|I_2|<\frac{M}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty}e^{-\alpha_1^2}d\alpha_1-\int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty}e^{-\alpha_2^2}d\alpha_2\right\}=$$

$$=\frac{M}{\sqrt{\pi}}2\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}e^{-\alpha^2}d\alpha,$$

حيث

$$\alpha_1=\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\quad,\quad\alpha_2=\frac{\xi+x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

ومن هنا تنتج العلاقة (16) لأن t ، x مثبتتان و $t_0\to-\infty$. وإذا ثبتنا t ، x فى العلاقة (15) وجعلنا $t_0\to-\infty$ فإن $u(x,t)$ ستكون مساوية لنهاية الحد الأول فقط ونحصل على العلاقة

$$u(x,t)=\frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)\,d\tau, \quad (17)$$

التى تثبت أنه لا يمكن وجود حلين مختلفين لمسألتنا . ويمكن أيضا إثبات أنه لأية دالة متقطعة الاتصال $\mu(t)$ تعبر العلاقة (17) عن حل المسألة المصاغة

وبالمثل يمكن بحث المسألة بدون شروط ابتدائية للمستقيم المحدود $(0\leqslant x\leqslant l)$. وهذه المسألة بدون شرط المحدودية يكون لها حل متعدد القيم لأن الدوال

$$u_n(x, t) = Ce^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

لأى n تعبر عن حل هذه المسألة بالقيم الحدية الصفرية . غير أن مثل هذا الحل يكون عندما $t \to -\infty$ غير محدود . ولا يشكل إثبات وحدانية الحل المحدود للمسألة المصاغة أية صعوبة .

مسائل على الباب الثالث

١ ـ عين دالة تأثير المصدر الحرارى اللحظى النقطى للقضيب :

(أ) للقضيب نصف اللانهائى بالشروط الحدية من النوع الأول والنوع الثانى وعند انعدام التبادل الحرارى على السطح الجانبى ؛

(ب) للقضيب اللانهائى عند وجود التبادل الحرارى على السطح الجانبى ؛

(جـ) للقضيب نصف اللانهائى عند وجود تبادل حرارى على السطح الجانبى وبالشروط الحدية من النوع الأول والثانى .

٢ ـ عين دالة تأثير المصدر الحرارى اللحظى النقطى للقضيب نصف اللانهائى ذى السطح الجانبى المعزول حراريا للمسألة الحدية الثالثة (بالشرط الحدى على الصورة $\frac{\partial u}{\partial x} - hu(0, t) = f(t)$) .

٣ ـ حل معادلة التوصيل الحرارى للحالات (أ) ، (ب) ، (جـ) فى المسألة ١ إذا كان :

(١) فى النقطة $x = \xi_0$ يؤثر مصدر الحرارة $Q = Q(t)$ وكحالة خاصة : $Q = Q_0 = \text{const}$.

(٢) معطى توزيع درجة الحرارة الابتدائى $u(x, 0) = \varphi(x)$ وكحالة خاصة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 & 0 < x < l \text{ عند} \\ 0 & (0, l) \text{ خارج} \end{cases}$$

(٣) وزعت مصادر حرارية بالكثافة $f(x, t)$ على كل القضيب ودرجة الحرارة الابتدائية تساوى الصفر . درس كحالة خاصة حالة $f = q_0 = \text{const}$ (مصادر مستقرة) .

٤ ـ قضيب نصف لانهائى ذو سطح جانبى معزول حراريا سخن بانتظام حتى درجة الحرارة

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const} \quad (x > 0).$$

ويحتفظ بطرف القضيب منذ اللحظة $t = 0$ عند درجة حرارة تساوى الصفر .

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0).$$

عين درجة حرارة القضيب $u(x, t)$. وبالاستعانة بجدول تكامل الأخطاء

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

رسم لمنحنيات بالمتغير x فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant l$ للدالة $u(x, t)$ عندما $t = l^2/a^2$ ، $t = l^2/2a^2$. $t = l^2/16a^2$.

إرشاد : من الأنسب الاستعانة بالمتغيرات بلا أبعاد

$$x' = x/l,\ \theta = a^2t/l^2,\ v = u/u_0.$$

٥ـ يفتح طرف أسطوانة نصف لانهائية فى اللحظة الابتدائية $t = 0$ فى الجو حيث يكون تركيز غاز ما u_0. عين تركيز الغاز فى الأسطوانة $u(x, t)$ لقيم $x > 0,\ t > 0$ إذا كان التركيز الابتدائى $u(x, t) = 0$. وبالاستعانة بجداول تكامل الأخطاء بين بعد أية فترة زمنية يصل تركيز الغاز فى الطبقة التى تبعد بمسافة l عن طرف الأسطوانة إلى ٩٥٪ من التركيز الخارجى . عين قانون حركة جبهة التركيز الثابت .

٦ـ يصل دفق حرارى $ku_x(0, t) = q(t)$ إلى طرف قضيب نصف لانهائى كانت درجة حرارته الابتدائية مساوية للصفر . عين درجة حرارة القضيب $u(x, t)$ إذا كان :

(أ) القضيب معزول حراريا من جوانبه ؛

(ب) يحدث تبادل حرارى على السطح الجانبى للقضيب (بقانون نيوتن) مع الوسط المحيط ذى درجة الحرارة الصفرية .

ادرس الحالة الخاصة $q = q_0 = \text{const}$.

٧ـ يحتفظ بطرف قضيب نصف لانهائى عند درجة حرارة ثابتة u_0 ويحدث على السطح الجانبى للقضيب تبادل حرارى مع وسط درجة حرارته ثابتة وتساوى u_1 . ودرجة حرارة القضيب الابتدائية تساوى الصفر . عين $u(x, t)$ درجة حرارة القضيب .

٨ـ حل المسألتين ٦ـ (أ) ، ٦ـ (ب) معتبرا أن $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

٩ـ عين درجة الحرارة المستقرة على امتداد قضيب نصف لانهائى ذى سطح جانبى معزول حراريا ، وعلى طرفه :

(أ) معطاة درجة الحرارة $u(0, t) = A \cos \omega t$ ؛

(ب) معطى دفق حرارى $Q(t) = B \sin \omega t$ ؛

(جـ) يحدث تبادل حرارى وفقا لقانون نيوتن مع وسط تتغير درجة حرارته وفقاً للقانون $v(t) = C \sin \omega t$.

١٠ـ بالاستعانة بطريقة الانعكاس كوّن دالة تأثير المصدر اللحظى النقطى للقضيب المحدود ذى السطح الجانبى المعزول حراريا بالشروط الحدية من النوع الأولّ والثانى .

١١ـ قضيب لانهائى يتكون من قضيبين متجانسين يتلامسان عند النقطة $x = 0$. ومميزاتهما a_1, k_1 ، a_2, k_2 على الترتيب . ودرجة الحرارة الابتدائية

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & , \quad x < 0, \\ T_2 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

عين درجة الحرارة $u(x, t)$ فى القضيب عندما يكون سطحه الجانبى معزولا حراريا .

ملاحق الباب الثالث

ملحق ١ ـ موجات درجة الحرارة

تعتبر مسألة انتشار موجات درجة الحرارة فى التربة من أول أمثلة تطبيقات النظرية الرياضية للتوصيل الحرارى ـ التى طورها فورييه ـ على دراسة ظواهر الطبيعة .

إن درجة الحرارة على سطح الأرض تحمل كما هو معلوم طبيعة دورية ظاهرة سنوية ويومية . نلجأ إلى مسألة انتشار الذبذبات الحرارية الدورية فى التربة التى سنعتبرها نصف فراغ متجانس $0 \leqslant x \leqslant \infty$. وهذه المسألة تعتبر مسألة مميزة للمسائل بلا شروط ابتدائية ، وذلك لأنه عند التكرار الكثير لسلوك درجة الحرارة على السطح يكون تأثير درجة الحرارة الابتدائية أقل من تأثير العوامل الأخرى التى نهملها (على سبيل المثال عدم تجانس التربة) . وبذلك نصل إلى المسألة التالية :

عين الحل المحدود لمعادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leqslant x < \infty, \ -\infty < t), \tag{1}$$

الذى يحقق الشرط

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

وهذه المسألة درست فى الباب الثالث . وحلها يكون على الصورة (انظر الباب الثالث ، بند ٤ ، معادلة (7)) :

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\, x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\, x - \omega t\right). \tag{3}$$

وعلى أساس هذا الحل الناتج يمكن إعطاء الصورة المميزة التالية لعملية انتشار موجة درجة الحرارة فى التربة . اذا كانت درجة حرارة السطح تتغير دوريا لمدة زمنية طويلة فإنه تحدث فى التربة أيضا ذبذبات لدرجة الحرارة بنفس الفترة علما بأن :

١ ـ سعة الذبذبات تتناقص بقانون أسى مع العمق

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\, x},$$

أى إذا زادت الأعماق تبعا لمتوالية حسابية فإن السعة تتناقص تبعا لمتوالية هندسية (قانون فوربيه الأول) .

٢ ـ تحدث ذبذبات درجة الحرارة فى الأرض بانزياح للطور . فالزمن δ لتأخير القيم العظمى (الصغرى) لدرجة الحرارة فى التربة عن اللحظات المناظرة على السطح يتناسب مع العمق

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}\, x$$

(قانون فوربيه الثانى) .

٣ ـ عمق تغلغل الحرارة فى التربة يعتمد على فترة ذبذبات درجة الحرارة على السطح . والتغير النسبى لسعة درجة الحرارة يساوى

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\, x}.$$

وهذه العلاقة توضح أنه كلما صغرت فترة الدورة كلما قل عمق تغلغل درجة الحرارة . وللذبذبات درجة الحرارة بالفترتين (الزمنين الدوريين) T_1 ، T_2 يرتبط العمقان x_2 ، x_1 اللذان يحدث عندهما تغير نسبى واحد لدرجة الحرارة بالعلاقة التالية :

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\, x_1$$

(قانون فوربيه الثالث) . فعلى سبيل المثال ، بمقارنة الذبذبات اليومية بالسنوية التى لها $T_2 = 365\, T_1$ يتضح أن

$$x_2 = \sqrt{365}\, x_1 = 19.1 x_1,$$

أى أن عمق تغلغل الذبذبات السنوية عندما تكون السعة على السطح واحدة فى الحالتين كان سيصبح أكبر من عمق تغلغل الذبذبات اليومية بـ ١٩,١ مرة .

وبمثابة مثال نورد نتائج ملاحظات ذبذبات درجة الحرارة السنوية فى محطة جوش الواقعة على نهر آمور بسيبيريا :

العمق (بالأمتار)	1	2	3	4
السعة (°م)	11.5	6.8	4.2	2.6

وهذه المعطيات توضح أن سعة الذبذبات السنوية على عمق ٤ أمتار تناقصت إلى حوالى ١٣,٣٪ من قيمتها على السطح التى تساوى ١٩,٥° . وعلى أساس هذه المعطيات يمكن تعيين معامل توصيل درجة الحرارة للتربة

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x, \quad a^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \frac{A(x)}{A}}.$$

ومن هنا نجد أن معامل توصيل درجة الحرارة للتربة يساوى

$$a^2 = 4 \cdot 10^{-3} \ \text{cm}^2/\text{s}$$

وزمن تأخير درجة الحرارة العظمى على عمق ٤ أمتار يصل إلى أربعة أشهر .

غير أنه يجب الأخذ فى الاعتبار أن النظرية المشروحة هنا تتعلق بانتشار الحرارة فى التربة الجافة أو الصخور . فوجود الرطوبة يعقد من الظواهر الحرارية فى التربة ، ويحدث عند التجمد ابتعاث حرارى كامن لا يؤخذ فى الاعتبار فى هذه النظرية .

إن معامل توصيل درجة الحرارة يعتبر أحد مميزات الجسم الهامة لدراسة خواصه الفيزيائية وكذلك للحسابات التكنيكية المختلفة . وتؤسس إحدى الطرق المعملية لتعيين معامل توصيل درجة الحرارة على دراسة انتشار موجات درجة الحرارة فى القضبان .

نفرض أنه يحتفظ بأحد طرفى قضيب طويل بشكل كاف عند درجة حرارة دورية $\mu(t)$ بالتعبير عن هذه الدالة بمتسلسلة فورييه

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T} t\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t - \delta_n^0)\right],$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n},$$

حيث T الزمن الدورى (الفترة) ، وبأخذ موجات درجة حرارة تناظر كل حد ، نجد أن درجة الحرارة $u(x,t)$ لأى x تكون دالة دورية فى الزمن وتكون توافقيتها رقم n مساوية

$$u_n(x, t) = a_n(x)\cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n(x)\sin\frac{2\pi n}{T}t =$$

$$= A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}x}\cos\left[\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}x - \frac{2\pi n}{T}t + \frac{2\pi n}{T}\delta_n^0\right]$$

أو

$$\frac{\sqrt{a_n^2(x_1) + b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2) + b_n^2(x_2)}} = e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}(x_1 - x_2)}.$$

وهذه العلاقة توضح أنه إذا أجرينا قياس درجة الحرارة فى نقطتين ما x_1 , x_2 خلال فترة زمن دورى كاملة فإننا بتعييننا للمعاملات $a_n(x_1)$, $b_n(x_1)$, $a_n(x_2)$, $b_n(x_2)$ بواسطة طرق التحليل التوافقى يمكن أن نعين معامل توصيل درجة الحرارة للقضيب a^2 .

ويمكن إحداث الذبذبات الدورية لدرجة الحرارة فى القضيب بالطريقة التالية مثلا : نضع أحد طرفى القضيب فى فرن كهربائى وبعد فترات زمنية متساوية نقوم بقطع وتوصيل التيار . ونتيجة لعملية التسخين الدورى هذه يحدث فى القضيب بعد بعض الوقت ذبذبات دورية لدرجة الحرارة . وبقياس درجتى الحرارة $u(x_1, t)$, $u(x_2, t)$ بواسطة جهاز القياس بالمزدوجة الحرارية (thermocouple) فى أية نقطتين x_2 , x_1 خلال فترة زمن دورى كاملة لتغير النظام الحدى ثم معالجة u_2 , u_1 على النحو الموضح أعلاه يمكن تعيين a^2 ـ معامل توصيل درجة الحرارة للمادة المصنوع منها القضيب . ومن الطبيعى أنه لقابلية النظرية الواردة أعلاه للتطبيق ينبغى أن يكون السطح الجانبى للقضيب معزولا حراريا وكذلك ينبغى مراقبة درجة حرارة الطرف الآخر للقضيب لكى يمكن الاستعانة بنظرية موجات درجة الحرارة فى القضيب نصف اللانهائى .

ولإمكانية الاستعانة بنظرية موجات درجة الحرارة فى القضيب نصف اللانهائى يجب التأكد من أن درجة الحرارة عند الطرف الحر للقضيب ثابتة . ويتم مراقبة ذلك بواسطة جهاز قياس إضافى .

ملحق ٢ ـ تأثير الانقسام الإشعاعى على درجة حرارة القشرة الأرضية

ليس لدينا للتحكم على الحالة الحرارية الداخلية للأرض إلا معلومات قليلة حصلنا عليها من الملاحظات على سطح الأرض . إن المعلومات الأساسية عن

المجال الحرارى للقشرة الأرضية تنحصر فيما يلى . إن الذبذبات اليومية والسنوية فى درجة الحرارة تحدث فى طبقة رقيقة نسبيا من السطح (حوالى ١٠ ـ ٢٠ مترا للذبذبات السنوية) . وأسفل هذه الطبقة تتغير درجة الحرارة مع تغير الزمن ببطء شديد .

وتبين الملاحظات التى نحصل عليها فى المناجم والأنفاق والمتعلقة بالطبقة العليا من القشرة الأرضية التى عمقها لا يزيد عن ٢ إلى ٣ كيلومترات ، أن درجة الحرارة ترتفع كلما تعمقنا داخل الأرض بمعدل ٣ درجات مئوية كل ١٠٠ متر .

وتعود المحاولات الأولى للتفسير النظرى لتدرج درجة الحرارة الأرضية الملاحظ إلى نهاية القرن الماضى ولكنها اصطدمت بمصاعب لم يمكن التغلب عليها فى ذلك الوقت . وقد انطلقت هذه المحاولات من تصور تبريد الأرض التى كانت محترقة ومنصهرة فى الماضى . ودرجة الحرارة الابتدائية التى تميز عملية التبريد هذه هى حوالى $T_0 = 1200° C$ (درجة حرارة انصهار الصخور الجبلية) ودرجة الحرارة السطحية هى حوالى $0° C$ ولا يمكن أن تنحرف انحرافا كبيرا عن هذه القيمة (أكثر من $100°$) خلال كل فترة وجود الأرض . وتؤدى النظرية الكمية المبسطة لعملية تبريد الأرض إلى حل معادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

فى نصف الفراغ $0 < z < \infty$ بالشروط الابتدائية والحدية التالية :

$$u(z, 0) = T_0, \quad u(0, t) = 0.$$

وقد درسنا حل هذه المسألة فى بند ٣ من هذا الباب ويعطى بالعلاقة

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

وتدرج (gradient) هذه الدالة عند $z = 0$ يساوى

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}} \left. e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}}.$$

وبالتعويض هنا بالقيم المعلومة لتدرج درجة الحرارة الأرضية $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm و $T_0 = 1200° C$ وكذلك بقيمة

المناظرة للقيمة المتوسطة المعينة بالتجربة العملية لمعامل توصيل $a^2 = 0.006 \text{ cm}^2/\text{s}$ درجة الحرارة للجرانيت والبازلت نحصل لمدة عملية التبريد على القيمة :

$$t = 0.85 \cdot 10^{15} \text{ s} = 27\,000\,000 \text{ years.}$$

ولكن هذا التصور عن عمر الأرض لا يتفق بأى شكل مع المعطيات الجيولوجية . والطابع التقريبي لهذه النظرية (إهمال انحناء الأرض وعدم ثبات معامل درجة الحرارة وتقريب قيمة T_0) لا يمكن بالطبع أن يؤدى إلى هذا التغير الكبير فى رتبة القيمة الناتجة لعمر الأرض وهو الذى يقدر وفقا للمعلومات الحديثة بحوالى $2 \cdot 10^9$ سنة تقريبا .

إن الشكل الفيزيائى لنظام درجة حرارة الأرض قد خضع إلى إعادة نظر جوهرية بعد اكتشاف الانقسام الإشعاعى . إن العناصر المشعة المنتشرة فى القشرة الأرضية يحدث عن انقسامها (انحلالها) تسخين لهذه القشرة الأرضية ، ولذا فإن معادلة التوصيل الحرارى يجب أن تكون على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \left(f = \frac{A}{c\rho}\right),$$

حيث A هى الكثافة الحجمية للمصادر الحرارية . وعلى أساس القياسات المتعددة لإشعاعية الصخور وقدرتها على البعث الحرارى تؤخذ القيمة

$$A = 1.3 \cdot 10^{-12} \text{ cal/cm}^3\text{s.}$$

وهذه القيمة تأخذ فى الاعتبار الحرارة التى يبعثها اليورانيوم والثوريوم والبوتاسيوم ومنتجات انقسامها .

نفرض أن كثافة المصادر المشعة داخل الكرة الأرضية ثابتة وتساوى قيمة A المعينة للطبقات العليا من القشرة الأرضية . وفى هذه الحالة فإن كمية الحرارة المنبعثة فى كل الكرة الأرضية خلال وحدة الزمن تكون مساوية :

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

نفرض فرضا ثانيا وهو أن الأرض لا تسخن بحرارة الإشعاع . وفى هذه الحالة فإن دفق الحرارة خلال وحدة مساحة السطح

$$q = k \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} \geqslant \frac{Q}{4\pi R^2},$$

حيث $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$ ، k هما معامل التوصيل الحرارى وتدرج درجة الحرارة الأرضية عند سطح الأرض . ومن هنا نعين للقيمة $\frac{\partial u}{\partial z}$ عندما $z=0$ القيمة

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} \geqslant \frac{AR}{3k} \cong 6.3 \cdot 10^{-2} \quad \text{grad/cm}$$

حيث $R = 6.3 \cdot 10^3$ km هو نصف قطر الأرض ، $k = 0.004$ القيمة المتوسطة لمعامل التوصيل الحرارى للصخور المترسبة .

وبذلك فتدريج درجة الحرارة الأرضية المحسوب بفرض أن توزيع العناصر المشعة فى الأرض ثابت وأن الأرض لا تسخن نتيجة الانقسام الإشعاعى يزيد برتبتين القيمة الملاحظة للمعامل

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \quad \text{grad/cm} .$$

وبرفض فرضية ثبات توزيع العناصر المشعة نفرض أن العناصر المشعة موزعة فى طبقة عمقها H على سطح الأرض . وبإهمال انحناء الأرض نحصل لتعيين درجة الحرارة المستقرة على المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & , \quad 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0 & , \quad z > H \end{cases}$$

بالشروط

$$u(0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z\to\infty} = 0.$$

ومن الواضح أن حل المسألة المطروحة هو

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k}\left(Hz - \frac{z^2}{2}\right), & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ \frac{A}{k}\frac{H^2}{2}, & z \geqslant H, \end{cases}$$

وذلك لأن هذه الدالة متصلة هى ومشتقتها الأولى عند $z = H$ وتحقق شروط المسألة .

وبتعيين قيمة تدرج هذه الدالة عند $z = 0$ المساوى

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{AH}{k},$$

ومقارنتها بالقيمة الملاحظة $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ grad/cm نجد أن

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^{6} \text{ cm} = 10 \text{ km}.$$

نقدر تأثير فرضية استقرار درجة الحرارة على مقدار تدرج درجة الحرارة الأرضية . ندرس لهذا الغرض حل معادلة التوصيل الحرارى

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \dfrac{A}{c\rho}, & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

بالشروط الابتدائية الصفرية والحدية

$$w(z, 0) = 0,$$
$$w(0, t) = 0.$$

وحل هذه المسألة يعبر عنه كما رأينا فى بند ٣ بالتكامل

$$w(z, t) = \int_0^{\infty} \int_0^{t} G(z, \zeta; t-\tau) f(\zeta)\, d\tau\, d\zeta,$$

حيث G دالة المصدر للمستقيم نصف اللانهائى وتساوى

$$G(z, \zeta; t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\}.$$

نحسب قيمة التدرج عند $z = 0$ بالأخذ فى الاعتبار قيمة الدالة f :

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho\, 2\sqrt{\pi}} \int_0^{H} \int_0^{t} \frac{\zeta}{\sqrt{[a^2(t-\tau)]^3}} e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\zeta\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \int_0^{\frac{H^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\alpha}\, d\alpha\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{a^2\theta}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}}\right] d\theta, \qquad \theta = t - \tau.$$

وبذلك فإن

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\sqrt{t}}{a} - \frac{H}{a^2} \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\}$$

حيث

$$\sigma=\frac{H}{2\sqrt{a^2\theta}},\quad \sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}},\quad \frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\frac{a^2}{H}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\theta}}.$$

نحسب التكامل

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma}\Big|_{\sigma_0}^{\infty}-2\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0}-2\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

ومن هنا نجد أن :

$$\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{A}{c\rho a^2}\left\{\frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\frac{H^2}{4a^2t}}\right]+H\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\sigma^2}d\sigma\right\}.\quad (1)$$

ونشير إلى أن

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{A}{k}H,$$

وذلك لأن $c\rho a^2=k$ ونهاية الحد الأول داخل القوسين تساوى الصفر ونهاية الحد الثانى تساوى H.

نحسب انحراف $\frac{\partial w}{\partial z}$ عن قيمته النهائية عند

$$t=2\cdot10^9 \text{ years}=6\cdot10^{16}\text{ s}.$$

قيمة σ_0 صغيرة :

$$\sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}=\frac{10^6}{2\sqrt{6\cdot10^{-3}\cdot6\cdot10^{16}}}=\frac{1}{2\cdot19}\cong0{,}025.$$

وبفك الدوال الداخلة فى العلاقة (1) فى متسلسلات نحصل على :

$$\frac{A}{k}H-\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{A}{k}H\left\{\frac{-1}{\sqrt{\pi}\,\sigma_0}[\sigma_0^2+\dots]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sigma_0\right\}\cong\frac{A}{k}H\cdot0.014,$$

أى أن $\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}$ يختلف عن قيمته الابتدائية بمقدار ١,٤٪ .

وليس من العسير حساب الدالة $w(z,t)$ للقيم $z>0$ والتأكد من أنه لأى $z\geqslant H$ لا تصل $w(z,t)$ بعد إلى قيمتها النهائية عند t المساوى لعمر الأرض (رغم أن التدرج عن السطح يساوى عمليا كما رأينا قيمته النهائية) .

والتحليلات الواردة تحمل بالطبع طابعا تقديريا فقط . غير أنه بالأخذ فى الاعتبار الاستقرار الكبير لسرعة الانقسام الإشعاعى التى لا تتغير تحت تأثير درجات الحرارة والضغوط المتاحة يجب أن نصل إلى نتيجة تنحصر فى أن تركيز العناصر المشعة يجب أن يتناقص بسرعة مع ازدياد العمق إذا ما بنينا تحليلاتنا على أساس القيمة A للطبقات العليا من القشرة الأرضية ، الناتجة من القياسات المتعددة . ولا يوجد حتى الآن تفسير فيزيائى يكفل توضيح قانون تناقص تركيز العناصر المشعة بازدياد العمق .

ملحق ٣ ـ طريقة التشابه فى نظرية التوصيل الحرارى

إن طريقة التشابه تكون مفيدة للغاية لحل عديد من مسائل التوصيل الحرارى . وبمثابة أمثلة ندرس مسألتين :

١ ـ دالة المصدر للمستقيم اللانهائى . إن معادلة التوصيل الحرارى ، كما يسهل التحقق من ذلك ، تظل دون تغير عند تحول المتغيرات

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t, \tag{1}$$

أى أنه إذا تغير مقياس الطول بمقدار k مرة فإن مقياس الزمن يجب أن يتغير بمقدار k^2 مرة .

سنبحث أولا عن حل معادلة التوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

بالشرط الابتدائى

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

وعند التغير المذكور فى المقاييس يظل الشرط الابتدائى (3) دون تغير ، ولذا فللدالة $u(x,t)$ يجب أن تتحقق المتساوية

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \tag{4}$$

لأية قيم x, t, k .

بفرض أن

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \tag{5}$$

نحصل على

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

وبذلك تعتمد u فقط على المتغير

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$

وبحساب مشتقات u من العلاقة (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

وبالتعويض فى معادلة التوصيل الحرارى (2) بهذه القيم للمشتقات واختصار $u_0/4t$ نحصل على :

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \tag{8}$$

بالشروط الإضافية

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \tag{9}$$

المناظرة للشرط الابتدائى للدالة u.

بتكامل المعادلة (8) سنحصل على :

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

وقد اخترنا النهاية السفلى هنا بحيث يتحقق الشرط الأول من (9) . ولكى يتحقق الشرط الثانى من (9) يجب أن نضع

$$C_1 = 1/\sqrt{\pi}.$$

وبذلك فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right], \qquad (10)$$

حيث

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(تكامل الأخطاء) . وإذا كان الشرط الابتدائى على الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 , & x > \bar{x}, \\ 0 , & x < \bar{x}, \end{cases} \qquad (11)$$

فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \qquad (12)$$

وننتقل الآن إلى حل المسألة المساعدة الثانية حيث تعطى القيم الابتدائية فى الصورة :

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 , & x_2 < x, \\ u_0 , & x_1 < x < x_2, \\ 0 , & x < x_1. \end{cases} \qquad (13)$$

وفى هذه الحالة فإن

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right].$$

ودرجة الحرارة الابتدائية u_0 تناظر كمية الحرارة :

$$Q = c\rho(x_2 - x_1) u_0.$$

وإذا كان

$$Q = c\rho,$$

فإن

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \qquad (14)$$

ودالة تأثير المصدر المركّز فى النقطة هى عبارة عن نهاية الدالة $u(x, t)$ عندما $x_2 - x_1 \to 0$.

والانتقال إلى النهاية فى العلاقة (14) يعطى :

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]_{\xi=x_1} \tag{15}$$

وذلك لأنه فى الطرف الأيمن للعلاقة (14) يوجد فرق نهايته عبارة عن المشتقة فى (15) .

وبإجراء التفاضل نجد أن :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2t}}, \tag{16}$$

أى أن $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ وهى دالة المصدر اللحظى النقطى .

٢ ـ المسائل الحدية للمعادلة شبه الخطية للتوصيل الحرارى . ندرس المعادلة شبه الخطية للتوصيل الحرارى

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t} \tag{17}$$

بمعامل التوصيل الحرارى المعتمد على درجة الحرارة .

نعين حل هذه المعادلة الذى يحقق الشرط الحدى والشرط الابتدائى التاليين :

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \tag{18}$$

وفى هذه الحالة فإن التحويل (1) أيضا لا يغير المعادلة (17) ولا يغير الشروط الإضافية (18) . ومن هنا ينتج أن

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{19}$$

وبالاستعانة بهذه الصيغة نحصل للدالة f على :

$$\frac{d}{dz}\left[k(f)\frac{df}{dz}\right] = -2c\rho z\frac{df}{dz} \tag{20}$$

بالشروط الإضافية

$$f(0) = u_1, \quad f(\infty) = u_2. \tag{21}$$

والدالة f فى تلك الحالات التى لا يمكن فيها تعيينها تحليليا يمكن تعيينها بواسطة عملية التكامل العددى .

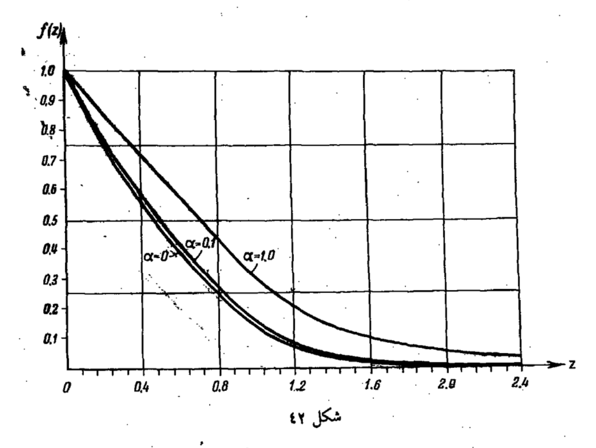
والمعادلة (20) بافتراضات عامة للغاية بخصوص الدالتين $c\rho$ ، k لها حل وحيد يحقق الشروط (21) . غير أننا لن نتوقف عند إثبات هذه الحقيقة .

ندرس كمثال المعادلة (17) حيث $k(u) = k_0 + k_1 u$ دالة خطية و $c\rho$ مقدار ثابت . بتغيير مقياس الزمن وتدريج قيم $\bar{u}$ نحصل للدالة المحولة على المعادلة $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1 + \alpha u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ بالشرطين الابتدائى والحدى $u(x, 0) = 0$ و $u(0, t) = 1$. بفرض

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

نحصل للدالة f على المعادلة

$$\frac{d}{dz}\left[(1 + \alpha f)\frac{df}{dz}\right] = -2z\frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \qquad (22)$$



شكل ٤٢

وإذا كان معامل التوصيل الحرارى $k(u)$ دالة قوى فى درجة الحرارة $k(u) = k_0 u^\sigma$ حيث $k_0 = \text{const} > 0, \ \sigma > 0$ وبدلا من (18) معطاة الشروط

$u(x, 0) = 0$ ، $n > 0$ ، $u(0, t) = u_0 t^n$ فإن للمعادلة (17) عندما $c\rho = 1$ يكون لها حل على الصورة $u(x, t) = t^n f(z)$ حيث $z = x/ct^m$ ، $m = (1 + n\sigma)/2$ ، $c = \text{const} > 0$ وكحالة خاصة عندما $n = \sigma$ نحصل على حل على نمط «موجة درجة الحرارة» المنتشرة بسرعة محدودة c :
$u(x, t) = u_0 t^n \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ عندما $x \leqslant ct$ ، $u(x, t) = 0$ عندما $x \geqslant ct$
(انظر الباب الرابع من الكتاب الثانى ، شكل ١٦) . وفى شكل ٤٢ ترد نتائج عملية التكامل العددى للمعادلة (22) لقيم σ المختلفة .

ملحق ٤ ـ مسألة على الانتقال الطورى

قد يحدث عند تغير درجة حرارة الجسم تغير فى حالته الفيزيائية : كحالة خاصة ، عند مرور درجة الحرارة منطقة الانصهار أى الانتقال من الطور السائل الى الصلب (أو العكس) . وعلى سطح الانتقال الطورى تظل درجة الحرارة طول الوقت ثابتة . وعند حركة سطح الانتقال الطورى يحدث انبعاث للحرارة الكامنة للتجمد (أو الانصهار) . نصيغ تلك الشروط الإضافية التى يجب أن تتحقق على سطح التجمد (التصلب) .

ندرس المسألة المستوية عندما يكون السطح الفاصل عبارة عن المستوى $x = \xi(t)$. وخلال الفترة الزمنية $t, t + \Delta t$ تتحرك الحدود $x = \xi$ من النقطة $\xi = x_1$ إلى النقطة $\xi = x_2 = x_1 + \Delta\xi$. وعند ذلك تتجمد الكتلة $\rho\Delta\xi$ (أو تنصهر إذا كان $\Delta\xi < 0$) وتنبعث كمية حرارة مناظرة هى $\lambda\rho\Delta\xi$.

ولتحقق التوازن الحرارى يجب أن تكون كمية الحرارة هذه مساوية للفرق بين كميتى الحرارة المارتين خلال الحدود $\xi = x_1$ ، $\xi = x_2$ أى يجب أن يتحقق الشرط

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x_2}\right] \Delta t = \lambda\rho\, \Delta\xi,$$

حيث k_2 ، k_1 معاملا التوصيل الحرارى للطورين الأول والثانى و λ هى الحرارة الكامنة للانصهار .

وبالانتقال إلى النهاية عند $\Delta t \to 0$ نحصل على الشرط الإضافى على الحدود الفاصلة على الصورة التالية :

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}.$$

ويتحقق هذا الشرط لعملية التجمد (عندما $0 < \frac{d\xi}{dt}$, $\Delta\xi \gtrless 0$) ولعملية الانصهار (عندما $\frac{d\xi}{dt} < 0$, $\Delta\xi < 0$) على السواء. ويتحدد اتجاه العملية بإشارة الطرف الأيسر .

ندرس عملية تجمد الماء التى تكون فيها درجة حرارة الانتقال الطورى مساوية للصفر. سندرس كتلة ماء $x \geqslant 0$ محدودة من ناحية واحدة بالمستوى $x = 0$. وفى اللحظة الابتدائية $t = 0$ تكون للماء درجة حرارة ثابتة $c > 0$. وإذا احتفظ على السطح $x = 0$ طول الوقت بدرجة حرارة ثابتة $c_1 < 0$ فإن حدود التجمد $x = \xi$ ستتعمق مع مرور الزمن داخل السائل .

ومسألة توزيع درجة الحرارة عند وجود الانتقال الطورى وسرعة حركة الحدود الفاصلة بين الطورين (على سبيل المثال داخل الماء أثناء تجمده) تؤول إلى حل المعادلتين

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} , \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} , \quad \xi < x < \infty \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

بالشروط الإضافية

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \quad \text{عندما} \quad x = 0 \ ، \\ u_2 &= c \quad \text{عندما} \quad t = 0 \ ، \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

والشروط على حدود التجمد

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{عندما} \quad x = \xi \ ، \qquad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}, \qquad (4)$$

حيث k_1, a_1^2 ، k_2, a_2^2 معاملات التوصيل الحرارى وتوصيل درجة الحرارة للطورين الصلب والسائل على التوالى . وكثيرا ما تسمى المسألة (4) — (1) بمسألة ستيفان ، مسألة الانتقال الطورى أو مسألة التجمد.

نبحث عن حل المسألة فى الصورة :

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

حيث B_2 , A_2 , B_1 , A_1 معاملات غير محددة حتى الآن ، و Φ تكامل الأخطاء

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

وبتحقيق الشروط (3) ، (2) نحصل على

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

من الشرط (2) ، ونحصل على

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0$$

من الشرط (3) . والشرطان الأخيران يجب أن يتحققا لأى t . وهذا ممكن فقط عند تحقق العلاقة

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \tag{5}$$

حيث α ثابت ما . والعلاقة (5) تحدد قانون حركة حدود التجمد.

وللثوابت A_1, B_1, A_2, B_2 و α تنتج الصيغ :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ولتعيين الثابت α نستعين بالعلاقة (4)

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7}$$

ويعطى حل هذه المعادلة المتسامية قيمة α . ووجود ولو حل واحد لهذه المعادلة عندما $c_1 < 0, c > 0$ إنما ينتج من أنه عند تغير α من الصفر إلى ∞ يتغير الطرف الأيسر للمعادلة من $\infty -$ إلى $\infty +$ * والطرف الأيمن يتغير من الصفر إلى $\infty -$. وفى تلك الحالة عندما تكون c مساوية لدرجة حرارة الانصهار $(c=0)$ فإن الصيغتين (6) ، (7) لتعيين المعاملات تأخذان صورتين أبسط :

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \qquad (6')$$

و

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda\rho\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (7')$$

شكل ٤٣

وبوضع $\alpha/2a_1 = \beta$ يمكننا كتابة المعادلة (7′) فى الصورة :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

حيث يتحدد الثابت D بالصيغة

$$D = \frac{\lambda\rho\, a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

وبالاستعانة بمنحنى الدالة $\varphi(\beta') = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,\Phi(\beta)}$ الوارد فى شكل ٤٣ يمكن بسهولة تعيين قيمة α بيانيا .

إن حل مسألة التجمد (مسألة ستيفان) يمكن الحصول عليه أيضا بواسطة طريقة التشابه الواردة فى الملحق ٣ بهذا الباب. فمسألة التجمد تعتبر بمعنى معين حالة نهائية للمسائل الحدية اللاخطية التى درست فى الملحق ٣ . بالفعل فمعاملات التوصيل الحرارى والسعة الحرارية فى مسألة التجمد تعتبر دوال متقطعة الثبات

* انظر التمثيل التقاربى للدالة $1 - \Phi(z)$ عندما $z \to \infty$ فى الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ٤ .

وعلاوة على ذلك فعند $u=0$ تكون للسعة الحرارية قيمة كبيرة كبرا لانهائيا . وهذه الحالة يمكن الحصول عليها كحالة نهائية عندما $\varepsilon \to 0$ وعندما لا تنبعث الحرارة الكامنة انبعاثا لحظيا ولكن تنبعث فى خلال فترة ما $+\varepsilon, -\varepsilon$ علما بأنه ينبغى أن يتحقق الشرط

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u)\, du = \lambda.$$

إلا أن هذه المسألة يمكن حلها مباشرة أيضا بالاستعانة بطريقة التشابه . وليس من الصعب التحقق من أن كل شروط المسألة ستظل دون تغير إذا ازداد مقياس الطول k مرة وازداد مقياس الزمن k^2 مرة . وهذا يعنى أن حل المسألة يعتمد على المتغير $\frac{x}{\sqrt{t}}$ أى أن

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

ومن هنا كحالة خاصة ينتج أن حركة الايزوثرم الصفرى توصف بالمعادلة $\xi = \alpha\sqrt{t}$ حيث α قيمة المتغير التى عندها تكون $f(\alpha) = 0$. ولتعيين الدالة f لدينا الشروط التالية :

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad , \qquad 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad , \qquad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda\rho \frac{\alpha}{2}.$$

ولذا فالدالة $f(z)$ تكون على الصورة

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{z}{2a_1}\right), & 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{z}{2a_2}\right), & \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

ولتعيين الثوابت A_1, B_1, A_2, B_2 يجب أن نستعين بالشروط (3) ، (2) التى تنتج منها العلاقة (6) . ولتعيين α ينتج الشرط (7) . وبذلك فالجزء التحليلى من الحل واحد فى الطريقتين .

وتوضح التصورات الواردة أن مسألة التجمد يمكن حلها أيضا فى تلك الحالات عندما تنبعث الحرارة الكامنة خلال فترة معينة من فترات تغير درجة الحرارة وليس فقط عند درجة حرارة معينة مثبتة . وبنفس الطريقة يمكن حل المسألة عندما توجد عدة درجات حرارة حرجة وليس درجة حرارة حرجة واحدة ، وهو ما نقابله فى التحولات الطورية فى عملية الانتقال من تركيب بلورى معين الى آخر ، على سبيل المثال عند إعادة تبلور الصلب . وأكثر طرق الحل العددى فعالية فى حل مسائل الانتقال الطورى هى طريقة الفروق المحدودة التى يمكن تطبيقها فى حالة متغيرين أو ثلاثة متغيرات فراغية عند وجود عدة انتقالات طورية (انظر الباب الرابع من الكتاب الثانى ، بند ٤) .

ملحق ٥ ـ معادلة اينشتين ـ كولموجوروف

تتحرك الجسيمات الميكروسكوبية الموجودة فى الوسط فى الحالة الحرة المعلقة حركة عشوائية تسمى بالحركة البراونية . نرمز لاحتمال وجود الجسيم الخارج من عند النقطة M_0 فى اللحظة t_0 فى الجوار الصغير ΔV للنقطة M فى اللحظة t بالدالة

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \qquad (1)$$

ويفهم الاحتمال هنا بمعنى أنه إذا كان يخرج خلال فترة زمنية صغيرة $t_0 + \Delta t$ من النقطة M_0 كمية كبيرة N من الجسيمات (علما بأن التأثير المتبادل فيما بينها ضئيل لدرجة يمكن فيها إهماله) فإن تركيز هذه الجسيمات عندما $\Delta t \to 0$ عند النقطة M فى اللحظة t يكون مساويا $W(M, t; M_0, t_0)$ وذلك إذا اعتبرنا وحدة الكتلة هى كل كتلة الجسيمات الخارجة من النقطة M_0 .

ونقابل مثل هذه الظواهر عند انتشار الغازات الناتج فى وسط ما (وسط هوائى مثلا) . والدالة $W(M, t; M_0, t_0)$ تمثل دالة المصدر النقطى المناظر لوحدة الكتلة .

ومن الواضح أن

$$\int W(M, t; M_0, t_0)\, dV_M = 1 \qquad (t > t_0) \qquad (2)$$

وأنه إذا كان التركيز الابتدائى للجسيمات فى لحظة زمنية ما t_0 مساويا $\varphi(M)$ فإن التركيز $u(M, t)$ لهذة الجسيمات فى اللحظة $t > t_0$ سيكون مساويا

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0)\varphi(P)\, dV_P, \qquad (3)$$

حيث يؤخذ التكامل على كل الفراغ.

ومن المتساوية الأخيرة تنتج المعادلة

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta) W(P, \theta; M_0, t_0)\, dV_P \qquad (4)$$
$$(t_0 < \theta < t),$$

التي تتحقق لأية قيمة $t_0 < \theta < t$. وهذه المعادلة الأخيرة تسمى معادلة اينشتين ـ كولموجوروف .

نوضح أنه عند شروط معينة مفروضة على الدالة $W(M, t;\ M_0, t_0)$ يحقق حل معادلة اينشتين ـ كولموجوروف معادلة ما تفاضلية جزئية من النمط المكافئ. ندرس تلك الحالة عندما يتحدد وضع النقطة M بإحداثي واحد x ، ونفرض أن الدالة $W(x, t;\ x_0, t_0)$ تحقق الشروط التالية :

1°

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\overline{x-\xi}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau}\int (x-\xi) W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx = A(\xi, t). \qquad (5)$$

وإذا انتقل الجسيم خلال الزمن τ من الوضع ξ إلى الوضع x فإن $\frac{\overline{x-\xi}}{\tau}$ تعتبر السرعة المتوسطة للجسيم. وبذلك يعني الشرط الأول مطلب وجود سرعة محدودة للحركة المنتظمة للجسيم.

2°

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\overline{(x-\xi)^2}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau}\int (x-\xi)^2 W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx = 2B(\xi, t). \qquad (6)$$

والمقدار $(x-\xi)^2$ لا يعتمد على اتجاه ازاحة النقطة x بالنسبة إلى النقطة ξ . والقيمة المتوسطة لمربع الانحراف خلال الزمن τ :

$$\overline{(x-\xi)^2} = \int (x-\xi)^2 W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx$$

تعتبر عادة مقياساً لعدم انتظام الحركة خلال هذه الفترة الزمنية. ويعني المطلب 2° افتراض الارتباط الخطي للمتوسط التربيعي بالزمن لقيم τ الصغيرة.

3°

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\overline{|x-\xi|^3}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau}\int |x-\xi|^3 \cdot W(x, t+\tau; \xi, t)\, dx = 0. \qquad (7)$$

والدالة $W(x, t+\tau; \xi, t)$ وهى دالة المصدر النقطى لقيم τ الصغيرة يجب أن تتناقص بسرعة عندما $|x-\xi| \to \infty$، وتتزايد عندما يكون $|x-\xi|$ صغيراً .

وللحصول على معادلة اينشتين ـ كولموجوروف التفاضلية نضرب طرفى المعادلة (4) فى دالة اختيارية $\psi(x)$ تؤول إلى الصفر هى ومشتقاتها على حدود منطقة التكامل وتكامل الناتج على كل هذه المنطقة :

$$\int W(x, t+\tau; x_0, t_0)\psi(x)\,dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0)\,d\xi \int W(x, t+\tau; \xi, t)\psi(x)\,dx.$$

وبفك الدالة $\psi(x)$ فى الطرف الأيمن بمتسلسلة تيلور بقوى $x-\xi$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x-\xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x-\xi)^3,$$

حيث ξ^* قيمة متوسطة محصورة بين ξ ، x وبالقسمة على τ نحصل بعد اختصارات بسيطة على :

$$\int \psi(x)\frac{W(x, t+\tau; x_0, t_0) - W(x, t; x_0, t_0)}{\tau}\,dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0)\left[\psi'(\xi)\frac{\overline{x-\xi}}{\tau} + \psi''(\xi)\frac{\overline{(x-\xi)^2}}{2\tau}\right]d\xi + \\ + \frac{1}{3!\tau}\int\int \psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t+\tau; \xi, t)\,d\xi\,dx.$$

وبفرض أن $\psi'''(x)$ محدودة

$$|\psi'''(x)| < A$$

مع الأخذ فى الاعتبار أن

$$\int W(\xi, t; x_0, t_0)\,d\xi = 1,$$

نحصل على

$$\left|\frac{1}{\tau}\int\int \psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t+\tau; \xi, t)\,d\xi\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{A}{\tau}\int |x-\xi|^3 W(x, t+\tau; \xi, t)\,dx = \frac{A\overline{|x-\xi|^3}}{\tau}.$$

ومن الشرط 3° ينتج أن هذه الصيغة تؤول إلى الصفر عندما $\tau \to 0$. ولذا فبالانتقال إلى النهاية عندما $\tau \to 0$ والاستعانة بالشرطين $1^\circ, 2^\circ$ نحصل على :

$$\int \psi(x) \frac{\partial W(x, t; x_0, t_0)}{\partial t} dx =$$
$$= \int W(\xi, t; x_0, t_0)[\psi'(\xi) A(\xi, t) + \psi''(\xi) B(\xi, t)] d\xi.$$

وبعد إجراء التكامل بالتجزئة للطرف الأيمن والأخذ فى الاعتبار أن الدالة ψ تؤول إلى الصفر هى ومشتقتها على حدود منطقة التكامل . نحصل على :

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (AW)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2}\right] dx = 0.$$

وحيث إن هذه العلاقة يجب أن تتحقق لأية دالة اختيارية $\psi(x)$ فإننا نحصل لدالة الاحتمالات $W(x, t;\ x_0, t_0)$ على معادلة اينشتين ـ كولموجوروف التفاضلية

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial (AW)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2}. \qquad (8)$$

وهذه المعادلة الناتجة هى معادلة من النمط المكافئ مثل معادلة التوصيل الحرارى ويمكن أن تكتب على الصورة :

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x}(BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \qquad (9)$$

حيث

$$\alpha = -A + B_x, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

ويتضح من المعادلة (9) أن المقدار B له معنى فيزيائى وهو معامل الانتشار . وإذا كانت العملية محل الدراسة متجانسة فى الفراغ والزمن أى أن الدالة W تعتمد فقط على الفرقين $\xi = x - x_0$ ، $\theta = t - t_0$ فإن المعاملين B ، A لا يعتمدان على x ، t ويكونان ثابتين . والمعادلة (8) فى هذه الحالة تصبح معادلة بمعاملات ثابتة

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A\frac{\partial W}{\partial x} + B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \qquad (10)$$

وإذا اعتمدت الدالة W على $|x - \xi|$ فقط أى أن احتمالى الإزاحة إلى اليمين وإلى اليسار بمسافتين متساويتين من النقطة ξ متساويان . فإنه من الواضح أن A يجب أن يكون مساويًا للصفر . وينتج ذلك تحليليًّا من العلاقة (5) نظرًا لأن الدالة المكاملة دالة فردية .

وفى هذه الحالة تكون المعادلة (8) هى المعادلة المبسطة للتوصيل الحرارى

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \qquad (11)$$

ملحق ٦ ـ دالة دلتا

فقرة ١ : تعريف دالة دلتا . بالإضافة إلى المقادير الموزعة باتصال (الكتلة ، الشحنة ، المصادر الحرارية ، الدفع الميكانيكى وغير ذلك) كثيرًا ما نضطر إلى التعامل مع المقادير المركزة (الكتلة النقطية ، الشحنة النقطية ، المصدر الحرارى النقطى ، الدفع المركز.. الخ) . ولا يجب أن ننسى أن هذه المفاهيم هى عبارة عن «نماذج نهائية» ويمكن تحديدها بواسطة مفهوم «الدوال المعممة» .

وبالأخذ فى الاعتبار المعنى الفيزيائى للمسألة ندرس الجهد (potential) فى النقطة M (انظر الباب الرابع ، بند ٥) لوحدة الكتلة المركزة داخل حجم ما T فى جوار النقطة M_0 . نأخذ متتابعة ما للدوال $(\rho_n > 0)$ $\{\rho_n\}$ وكل دالة من هذه الدوال تساوى الصفر خارج الكرة $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ التى نصف قطرها ε_n ومركزها فى النقطة M_0. حيث $\varepsilon_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ ويكون لها ابتداء من عدد ما n :

$$\iiint_T \rho_n(P)\, d\tau_P = \iiint_{S_{\varepsilon_n}^{M_0}} \rho_n(P)\, d\tau_P = 1. \qquad (1)$$

وبدراسة متتابعة الدوال

$$u_n = \iiint_T \frac{\rho_n}{r}\, d\tau,$$

التى تعتبر جهودًا للكتل الموزعة بالكثافات ρ_n . والانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ نحصل على :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0M}}. \qquad (2)$$

وهذه النتيجة ، كما هو واضح ، لا تعتمد على اختيار المتتابعة $\{\rho_n\}$. ورغم أن المتتابعة $\{u_n\}$ تتقارب إلى $1/r$ فالمتتابعة $\{\rho_n\}$ ليس لها نهاية فى فئة الدوال متقطعة القابلية للتفاضل محل الدراسة . و «النموذج النهائى» المناظر للمتتابعة $\{\rho_n\}$ يسمى بدالة دلتا $\delta(M, M_0)$.

والصفة الأساسية المميزة لدالة دلتا هى العلاقة المؤثرية الشكلية التالية :

$$\iiint_T \delta(M_0, M) f(M)\, d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & M_0 \in T, \\ 0, & M_0 \notin T, \end{cases} \qquad (3)$$

حيث $f(M)$ دالة اختيارية متصلة فى النقطة M . وبالأخذ فى الاعتبار أنه عند $n \to \infty$ تؤول الدوال ρ_n بانتظام إلى الصفر فى أية منطقة لا تحتوى على M_0 وتزداد بلا حدود فى الجوار $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ للنقطة M_0 ، تعرف دالة دلتا أحيانًا بواسطة العلاقات

$$\left.\begin{array}{ll} \delta(M, M_0) = 0 \quad , & M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) = \infty \quad , & M = M_0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

و

$$\iiint_T \delta(M, M_0)\, d\tau_M = \begin{cases} 1 \quad , & M_0 \in T, \\ 0 \quad , & M_0 \notin T. \end{cases} \tag{5}$$

والمتساوية (5) تعتبر نتيجة واضحة للعلاقة (3) عندما $f = 1$.

وعند دراسة متتابعات الدوال فى مختلف المسائل نضطر إلى التعامل مع تعريفات مختلفة للتقارب .

فيقال إن متتابعة الدوال

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), \quad u_2(x), \; \ldots, \; u_n(x), \; \ldots \tag{6}$$

تتقارب بانتظام فى الفترة (a, b) إذا أمكن لأى $0 < \varepsilon$ الإشارة إلى ذلك العدد N بحيث انه عندما $n, m > N$ يتحقق لأى x من (a, b) الشرط

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{عند} \quad n, m > N .$$

ويقال إن المتتابعة (6) تتقارب فى المتوسط فى الفترة (a, b) إذا أمكن لأى $\varepsilon > 0$ الإشارة إلى ذلك العدد N بحيث إنه عندما $n, m > N$ يكون

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

ويقال إن المتتابعة (6) تتقارب بضعف فى الفترة (a, b) إذا وجدت لأية دالة متصلة f النهاية التالية :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) u_n(x)\, dx.$$

وعند دراسة المتتابعات المتقاربة تدرج عادة العناصر (الحدود) النهائية للمتتابعات. ندرس فئة الدوال المتصلة فى الفترة (a, b). فى حالة التقارب المنتظم يكون العنصر (الحد) النهائى منتمياً إلى نفس فئة الدوال وهذا ما لا يتحقق دائماً للتقارب فى المتوسط وللتقارب الضعيف.

وإذا كان العنصر النهائى لا ينتمى إلى فئة الدوال المدروسة فإن العناصر النهائية يتم إدراجها بحيث نوسع بذلك الفئة الأصلية. وعند ذلك نقصد بالتوسيع مجمل العناصر الأصلية والنهائية. ونقابل مفهوم التوسيع فى نظرية الأعداد الحقيقية عندما تدرج الأعداد غير المنطقة (irrational numbers) كعناصر نهائية معرفة بفئة المتتابعات المتكافئة.

وعندما نتحدث عن العناصر النهائية فى معنى التقارب الضعيف سنقول إن متتابعتين $\{v_n\}$. $\{u_n\}$ لهما نفس العنصر النهائى إذا كانت المتتابعتان متكافئتين أى إذا كانت المتتابعة $\{u_n - v_n\}$ تتقارب بضعف إلى الصفر:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,[u_n(x) - v_n(x)]\,dx = 0.$$

وتسمى متتابعة الدوال غير السالبة $\{\delta_n\}$ متتابعة متوحدة محلية للنقطة x_0 (local normalized sequence) إذا كانت الدالة δ_n مساوية للصفر خارج الفترة $(x_0 - \varepsilon_n,\ x_0 + \varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ و

$$\int_a^b \delta_n(x)\,dx = 1.$$

ومن الواضح أن المتتابعة $\{\delta_n\}$ تتقارب بضعف. والعنصر النهائى للمتتابعة $\{\delta_n\}$ يسمى عادة بدالة δ للنقطة x_0 .

وفى تلك الحالة عندما يخرج العنصر النهائى u - بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\{u_n\}$ - من فئة الدوال u_n فإن تكامل حاصل ضرب دالة ما $f(x)$ فى العنصر u يعرف بوصفه النهاية

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,u\,dx.$$

ومن الواضح أنه لدالة دلتا للنقطة x_0 تتحقق المتساوية

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x_0, x)\,dx = f(x_0).$$

وهذه العلاقة كثيرًا ما تعتبر تعريفًا لدالة دلتا .

فقرة ٢ : تحليل دالة دلتا فى متسلسلة فورييه . يمكن أيضًا تعريف دالة دلتا بوصفها نموذجًا نهائيًّا لمتتابعات أخرى متكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة الواردة أعلاه $\delta_n(x)$ من الدوال المحلية المتوحدة فى الدالة x_0 .

ندرس متتابعة الدوال

$$\bar{\delta}_n(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\left(\cos\frac{m\pi}{l}x_0\cdot\cos\frac{m\pi}{l}x + \sin\frac{m\pi}{l}x_0\sin\frac{m\pi}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\cos\frac{m\pi}{l}(x - x_0) \qquad (7)$$

أو فى الصورة المركبة

$$\bar{\delta}_n(x, x_0) = \frac{1}{2l}\sum_{-n}^{n} e^{im\frac{\pi}{l}(x-x_0)}, \qquad (7')$$

المعرفة فى الفترة $(-l, l)$.

ومن الواضح أنه لأية دالة $g(x)$ قابلة للتحليل فى متسلسلة فورييه تتحقق المتساوية النهائية التالية :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}\bar{\delta}_n(x_0, x)\,g(x)\,dx = g(x_0), \qquad (8)$$

التى تبين أنه فى فئة الدوال $\{g(x)\}$ القابلة للتحليل فى متسلسلة فورييه تكون المتتابعة الواردة أعلاه $\delta_n(x_0, x)$ مكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\bar{\delta}_n(x_0, x)$ ، أى أن

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi}{l}(x_0 - x), \qquad (9)$$

وذلك إذا ما فهمنا هذه المتساوية على أساس وجهة نظر التقارب الضعيف الواردة أعلاه .

ومن وجهة النظر هذه تتحقق المتساوية

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\, \varphi_n(x_0), \tag{10}$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ مجموعة كاملة ومتعامدة ومتوحدة من الدوال معرفة فى فترة ما (a, b) . وكذلك تتحقق المتساوية :

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0 - x)}\, dk = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos k(x_0 - x)\, dk. \tag{11}$$

نبين أنه عند حساب التكاملات المحتوية على دالة دلتا يمكن الاستعانة بالمتسلسلة (9) بإجراء التكامل حدًّا حدًّا للدالة المكاملة .

ندرس دالة ما $g(x)$ قابلة للتحليل فى متسلسلة فورييه ، والتكامل

$$\int_{-l}^{l} g(x)\, \delta(x_0, x)\, dx.$$

بالتعويض هنا عن $\delta(x_0, x)$ بصيغتها من العلاقة (9) نجرى عملية التكامل حدًّا حدًّا للمتسلسلة الموجودة تحت علامة التكامل . فنحصل فى النهاية على :

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{g}_m \cos\frac{\pi m}{l} x + \bar{\bar{g}}_m \sin\frac{\pi m}{l} x \right), \tag{11'}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} g(x_0)\, dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} g(x_0) \cos\frac{\pi m}{l} x_0\, dx_0, \\ \bar{\bar{g}}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} g(x_0) \sin\frac{\pi m}{l} x_0\, dx_0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

وتبين مقارنة العلاقة (11) بالمتساوية

$$\int_{-l}^{l} \delta(x, x_0)\, g(x)\, dx = g(x_0) \qquad (-l < x_0 < l)$$

أن عملية التكامل حدًّا حدًّا التى أجريناها أعلاه لمتسلسلة دالة دلتا تؤدى إلى نتيجة صحيحة .

وبذلك فى فئة الدوال القابلة للتحليل فى متسلسلة فوربيه تكون متتابعة المجاميع الجزئية :

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^{k} e^{i \frac{\pi n}{l} (x-x')}$$

مكافئة للمتتابعة المحلية المتوحدة $\{\delta_n\}$.

والصور الأخرى لتمثيل دالة دلتا مبنية أيضًا على الاستعانة ببعض المتتابعات الدالية المكافئة بمعنى التقارب الضعيف للمتتابعة $\{\delta_n\}$.

فقرة ٣ : تطبيق دالة دلتا لتكوين دالة المصدر . ندرس المسألة التالية :

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{13}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{14}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{15}$$

والدالة المعطاة $\varphi(x)$ يناظرها حل وحيد للمسألة

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)].$$

نفرض أن المؤثر $\mathscr{L}$ يمكن التعبير عنه فى الصورة :

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

حيث $G(x, \xi, t)$ نواة المؤثر $\mathscr{L}$.

ولتعيين النواة $G(x, \xi, t)$ نضع

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{14'}$$

وباستبدال $\varphi(x)$ بدالة دلتا فى العلاقة (16) نحصل على :

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \tag{17}$$

أى أن $G(x, x_0, t)$ تعتبر حلاً للمسألة (13) بالشرط الابتدائى (14′) .

نعبر عن دالة دلتا بمتسلسلة فورييه

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l} x_0.$$

ومن الواضح أن النواة G يجب البحث عنها فى صورة المجموع :

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\frac{n\pi}{l} x, \tag{18}$$

الذى يجب أن يحقق كل حد من حدوده معادلة التوصيل الحرارى . ومن هنا ينتج أن

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

ومن الشرط الابتدائى نحصل مباشرة على

$$B_n = \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi}{l} x_0.$$

وبذلك حصلنا شكليًا للنواة G على الصيغة :

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l} x_0, \tag{19}$$

التى تنطبق على تمثيل دالة المصدر الذى بحثناه فى بند ٣ . ويعطى حل المسألة (15) — (13) بالعلاقة (16) حيث $G(x, x_0, t)$ دالة معرفة بالعلاقة (19) .

وبنفس الطريقة يمكن تعيين صيغة دالة المصدر للمستقيم اللانهائى . فالدالة G فى هذه الحالة ستعرف بالشروط

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (-\infty < x < \infty), \tag{20}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{21}$$

وبالأخذ فى الاعتبار مفكوك دالة دلتا فى تكامل فوريه

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda,$$

سنبحث عن $G(x, x_0, t)$ فى الصورة

$$G(x, x_0, t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A_\lambda(t)\cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda. \tag{22}$$

ومن المعادلة (20) نعين

$$A_\lambda(t)=A_\lambda^{(0)}e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{23}$$

وبوضع $t=0$ ومقارنة العلاقتين (21) ، (23) نجد أن

$$A_\lambda^{(0)}=1.$$

وبذلك

$$G(x, x_0, t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda.$$

ويعطى حساب هذا التكامل :

$$G(x, x_0, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

ومن هنا ينتج أن حل مسألة انتشار درجة الحرارة الابتدائية على المستقيم اللانهائى يجب التعبير عنه بالعلاقة :

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

ويتطلب توضيح حدود قابلية العلاقات الناتجة بطريقة دالة دلتا للتطبيق بحثًا خاصًا .

بمثابة مثال ندرس الآن المعادلة اللامتجانسة :

$$u_t=a^2u_{xx}+\frac{F(x, t)}{c\rho}, \tag{25}$$

حيث $F(x,t)$ كثافة المصادر الحرارية الموزعة . وإذا وضع عند النقطة $x = \xi$ في اللحظة $t = t_0$ مصدر حراري لحظي قدرته Q_0 فإن

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi)\, \delta(t - t_0). \tag{26}$$

نعين حل المعادلة اللامتجانسة

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho}\, \delta(x - \xi)\, \delta(t - t_0) \qquad (t_0 > 0) \tag{27}$$

بالشرط الابتدائي الصفري

$$u(x, 0) = 0.$$

وبالأخذ في الاعتبار التمثيل التكاملي

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (x - \xi)\, d\lambda,$$

سنبحث عن الدالة $u(x, t)$ في الصورة :

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_\lambda(t) \cos \lambda (x - \xi)\, d\lambda.$$

بالتعويض بهذه الصيغ في المعادلة (27) نحصل على معادلة للدالة $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2 \lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho}\, \delta(t - t_0)$$

بالشرط الابتدائي

$$u_\lambda(0) = 0.$$

وكما هو معلوم يكون حل المعادلة اللاخطية

$$\dot{u} + \alpha^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

على الصورة :

$$u(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2 (t - \tau)} f(\tau)\, d\tau. \tag{28}$$

وفي حالتنا

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \int_0^t e^{-a^2\lambda^2 (t - \tau)}\, \delta(\tau - t_0)\, d\tau = \begin{cases} 0 & , \quad t < t_0, \\ \frac{Q_0}{c\rho}\, e^{-a^2\lambda^2 (t - t_0)} & , \quad t > t_0 \end{cases} \tag{29}$$

وبذلك فإن

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{c\rho} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 (t-t_0)} \cos \lambda (x - \xi) \, d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho} G(x, \xi, t - t_0),$$

حيث

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-t_0)}}$$

هى دالة تأثير المصدر اللحظى النقطى .

ومثل هذه الطريقة لتكوين دالة التأثير تستخدم كثيرًا فى الفيزياء النظرية .

الباب الرابع

المعادلات من النمط الناقصى

عند بحث العمليات المستقرة - مهما اختلفت الطبيعة الفيزيائية لكل عملية (ذبذبات - توصيل حرارى - انتشار .. الخ) - نصل عادة إلى معادلات على النمط الناقصى . وأكثر المعادلات على هذا النمط انتشارا هى معادلة لابلاس :

$$\Delta u = 0.$$

والدالة u تسمى دالة توافقية فى المنطقة T إذا كانت متصلة فى هذه المنطقة هى ومشتقاتها حتى الرتبة الثانية وتحقق معادلة لابلاس .

وخلال دراسة خواص الدوال التوافقية عولجت ودرست طرق رياضية اتضحت فائدتها وفاعليتها أيضا عند التطبيق على المعادلات على النمطين الزائدى والمكافئ .

بند ١ - المسائل التى تؤدى إلى معادلة لابلاس

فقرة ١ : المجال الحرارى المستقر . صياغة المسائل الحدية . ندرس مجالا حراريا مستقرا . فى الباب الثالث أوضحنا أن درجة الحرارة فى المجال الحرارى غير المستقر تحقق المعادلة التفاضلية للتوصيل الحرارى

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right).$$

وإذا كانت العملية مستقرة (لا تعتمد على الزمن) فإنه يوجد توزيع لدرجة الحرارة $u(x, y, z)$ لا يتغير مع مرور الزمن وبالتالى يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta u = 0. \qquad (1)$$

وعند وجود مصادر حرارية نحصل على المعادلة

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \qquad (2)$$

حيث F كثافة المصادر الحرارية . k معامل التوصيل الحرارى . ومعادلة لابلاس اللامتجانسة (2) تسمى عادة بمعادلة بواسون .

ندرس حجما ما T محدودا بالسطح Σ . ومسألة توزيع درجة الحرارة $u(x, y, z)$ داخل الجسم T تصاغ على الوجه التالى :

عين الدالة $u(x, y, z)$ التى تحقق داخل T المعادلة

$$\Delta u = -f(x, y, z) \qquad (2)$$

والشرط الحدى الذى يمكن أخذه على إحدى الصور التالية :

(١) المسألة الحدية الأولى : $u = f_1$ على السطح Σ .

(٢) المسألة الحدية الثانية : $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ على السطح Σ .

(٣) المسألة الحدية الثالثة : $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ على السطح Σ .

حيث f_1, f_2, f_3, h دوال معطاة . $\frac{\partial u}{\partial n}$ المشتقة بالنسبة إلى العمودى الخارجى على السطح Σ * .

والمعنى الفيزيائى لهذه الشروط الحدية واضح (انظر الباب الثالث . بند ١) . وكثيرا ما تسمى المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس بمسألة ديريشليت والمسألة الثانية تسمى بمسألة نيمان .

وإذا كان يبحث عن الحل فى المنطقة T_0 الداخلية (أو الخارجية) بالنسبة إلى السطح Σ فإن المسألة المناظرة تسمى بالمسألة الحدية الداخلية (أو الخارجية) .

فقرة ٢ : التيار الجهدى للسائل (potential flow) . **جهد التيار المستقر والمجال الكهروستاتيكى** . ندرس بمثابة المثال الثانى التيار الجهدى للسائل بدون مصادر . نفرض أنه يوجد داخل حجم ما T حدوده Σ تيار مستقر لسائل لا منضغط

---

* من الواضح أن التوزيع المستقر لدرجة الحرارة يمكن أن يحدث فقط بشرط أن يساوى الصفر الدفق الإجمالى للحرارة خلال حدود المنطقة . ومن هنا ينتج أن الدالة f_2 يجب أن تحقق شرطا إضافيا وهو :

$$\iint_{\Sigma} f_2 \, d\sigma = 0.$$

(الكثافة $\rho = \text{const}$) يميز بالسرعة $v(x, y, z)$. إذا كان تيار السائل غير دردورى (no vortexes) فإن السرعة v تعتبر متجها جهديا (محافظا) أى

$$v = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{3}$$

حيث φ دالة مقياسية (scalar) تسمى بجهد السرعة . وإذا انعدمت المصادر فإن

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{4}$$

بالتعويض هنا بالصيغة (3) للسرعة v نحصل على :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

أو

$$\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

أى أن جهد السرعة يحقق معادلة لابلاس .

نفرض أنه فى وسط متجانس موصل يوجد تيار مستقر (كهربائى) ذو كثافة حجمية $j(x, y, z)$. وإذا انعدمت المصادر الحجمية للتيار فى الوسط فإن

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{6}$$

والمجال الكهربائى E يتحدد بواسطة كثافة التيار من قانون أوم التفاضلى

$$E = \frac{j}{\lambda}, \tag{7}$$

حيث λ موصلية الوسط . وحيث إن العملية مستقرة فإن المجال الكهربائى يعتبر غير دردورى أو يعتبر مجالا جهديا (محافظا)* . أى توجد تلك الدالة القياسية $\varphi(x, y, z)$ بحيث يكون لها

$$E = -\operatorname{grad} \varphi \qquad (j = -\lambda \operatorname{grad} \varphi). \tag{8}$$

* من معادلة ماكسويل الثانية $\operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c}\dot{H}$ ينتج أن $\operatorname{rot} E = 0$.

ومن هنا وعلى أساس العلاقتين (7) , (6) نستنتج أن

$$\Delta\varphi = 0, \tag{9}$$

أى أن جهد المجال الكهربائى للتيار المستقر يحقق معادلة لابلاس .

ندرس المجال الكهربائي للشحنات المستقرة . وينتج من استقرار العملية أن

$$\text{rot}\, \boldsymbol{E} = 0, \tag{10}$$

أى أن المجال جهدى (محافظ) و

$$\boldsymbol{E} = -\,\text{grad}\, \varphi. \tag{8}$$

نفرض أن $\rho(x, y, z)$ هى الكثافة الحجمية للشحنات الموجودة فى الوسط المميز بمعامل العازل (dielectric coefficient) $\varepsilon = 1$. وانطلاقا من القانون الأساسى للكهروديناميكا

$$\iint\limits_S E_n\, dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint\limits_T \rho\, d\tau, \tag{11}$$

حيث T حجم ما ـ S السطح الذى يحده ـ $\sum e_i$ مجموع كل الشحنات داخل T ـ وبالاستعانة بنظرية اوستروجرادسكى

$$\iint\limits_S E_n\, dS = \iiint\limits_T \text{div}\, \boldsymbol{E}\, d\tau, \tag{12}$$

نحصل على :

$$\text{div}\, \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

بالتعويض هنا بالصيغة (8) بدلا من $\boldsymbol{E}$ نحصل على :

$$\Delta\varphi = -\,4\pi\rho, \tag{13}$$

أى إن الجهد الكهروستاتيكى φ يحقق معادلة بواسون . وإذا انعدمت الشحنات الحجمية $(\rho = 0)$ فإن الجهد φ يجب أن يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi = 0.$$

والمسائل الحدية الأساسية للعمليات السابق دراستها تنتمى إلى الأنواع الثلاثة الواردة أعلاه . ولن نتوقف هنا عند بعض المسائل الحدية الأخرى التى تميز مختلف العمليات الفيزيائية . وبعض هذه المسائل سنورده فى الملاحق .

فقرة ٣ : معادلة لابلاس فى مجموعة الإحداثيات المنحنية . نستنبط صيغة مؤثر لابلاس فى مجموعة الإحداثيات المتعامدة المنحنية . نفرض أنه مدرجة فى الفراغ مجموعة الإحداثيات المنحنية q_1, q_2, q_3 - بدلا من مجموعة الإحداثيات الكرتيزية x, y, z ، بالعلاقات

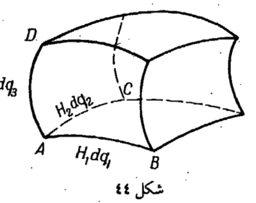
$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \tag{14}$$

وبحلها بالنسبة إلى x, y, z يمكن أن نكتب :

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{15}$$

بوضع $q_3 = C_3$ ، $q_2 = C_2$ ، $q_1 = C_1$ حيث C_1, C_2, C_3 ثوابت - نحصل على ثلاث عائلات من السطوح الإحداثية :

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2,$$
$$f_3(x, y, z) = C_3. \tag{16}$$



شكل ٤٤

ندرس عنصر الحجم فى الإحداثيات الجديدة المحدود بثلاثة أزواج من السطوح الإحداثية (شكل ٤٤) . وعلى الضلع AB يكون $q_3 = \text{const}$ ، $q_2 = \text{const}$ - وعلى الضلع AD يكون $q_1 = \text{const}$ ، $q_2 = \text{const}$ - وعلى الضلع AC يكون $q_3 = \text{const}$ ، $q_1 = \text{const}$. وجيوب التمام الاتجاهية لماسات الأضلاع AB ، AC ، AD متناسبة على الترتيب مع

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

وشرط تعامد الأضلاع سيكون على الصورة :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k} = 0 \qquad (i \neq k). \tag{17}$$

نحسب عنصر الطول فى الإحداثيات الجديدة .

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3} dq_3\right)^2. \tag{18}$$

وبفك الاقواس مع أخذ شرط التعامد (17) فى الاعتبار نحصل على :

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \tag{19}$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

وعلى امتداد كل ضلع من عنصر الحجم يتغير إحداثى واحد فقط ولذا نحصل لأطوال هذه الأضلاع وفقا للعلاقة (19) على :

$$ds_1 = H_1\, dq_1, \qquad ds_2 = H_2\, dq_2, \qquad ds_3 = H_3\, dq_3, \tag{21}$$

ومن ثم فعنصر الحجم يكون مساويا

$$dv = ds_1\, ds_2\, ds_3 = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \tag{22}$$

ندرس الآن مجالا اتجاهيا ما $\boldsymbol{A}(x, y, z)$. نحسب $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ الذى يعرف بالعلاقة المعروفة من علم التحليل الاتجاهى :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{v_M \to 0} \frac{\iint\limits_S A_n\, dS}{v_M}, \tag{23}$$

حيث S السطح الذى يحد حجما ما v_M يحتوى النقطة محل الدراسة M . نطبق هذه العلاقة على عنصر الحجم dv المبين بشكل ٤٤ .

وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة يمكن التعبير عن الفرق بين دفقى المتجه A خلال وجهى الحجم المتقابلين ، على سبيل المثال خلال الوجهين الأيمن والأيسر، على الصورة :

$$Q_1 = A_1\, ds_2\, ds_3 \,|_{q_1+dq_1} - A_1\, ds_2\, ds_3 \,|_{q_1}.$$

وبالأخذ فى الاعتبار العلاقات (21) نحصل على :

$$Q_1 = [H_2H_3A_1 \,|_{q_1+dq_1} - H_2H_3A_1 \,|_{q_1}]\, dq_2\, dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \quad (24)$$

وبالمثل يحسب الفرقان الآخران للدفوق خلال الأوجه المتقابلة :

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2)\, dq_1\, dq_2\, dq_3, \quad (25)$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \quad (26)$$

بالتعويض فى العلاقة (23) بقيمة $\iint_S A_n\, ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$ والاستعانة بالعلاقة (22) نحصل على صيغة التباعد (div) فى الإحداثيات المتعامدة المنحنية :

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right]. \quad (27)$$

نفرض أن المجال A جهدى (محافظ) أى أن

$$A = \operatorname{grad} u. \quad (28)$$

وعندئذ يكون

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}. \quad (29)$$

بالتعويض فى (27) بصيغ A_1, A_2, A_3 من (29) نحصل على صيغة مؤثر لابلاس

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \\ = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (30)$$

وبذلك فمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$ فى الإحداثيات المتعامدة المنحنية q_1, q_2, q_3 تكتب على الصورة التالية :

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] = 0. \quad (31)$$

ندرس حالتين خاصتين :

١ ـ الإحداثيات الكروية (القطبية الفراغية) . فى هذه الحالة $q_1 = r,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi$ وتأخذ علاقات التحويل (15) الصورة التالية :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

نحسب ds^2 :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (\sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi)^2 + \\ & + (\sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi)^2 + \\ & + (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2; \end{aligned}$$

وبعد فك الأقواس والاختصارات نحصل على

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

أى أن

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta.$$

بالتعويض عن قيم H_1, H_2, H_3 فى العلاقة (31) نحصل على معادلة لابلاس فى الإحداثيات الكروية :

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] = 0$$

أو نهائيا نحصل على :

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (32)$$

٢ ـ الإحداثيات الاسطوانية . فى هذه الحالة لدينا $q_1 = \rho$ ، $q_2 = \varphi$ ، $q_3 = z$ ؛

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

ومن ثم فإن

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

ومعادلة لابلاس فى الإحداثيات الأسطوانية تأخذ الصورة :

$$\Delta_{\rho, \varphi, z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (33)$$

وإذا كانت الدالة المجهولة u لا تعتمد على z فإن المعادلة (33) تأخذ صورة مبسطة* :

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (34)$$

فقرة ٤ : بعض الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس . تشكل حلول معادلة لابلاس ذات التماثل الكروى أو الأسطوانى ، أى تلك الحلول التى تعتمد فقط على متغير واحد r أو ρ ، أهمية خاصة .

فحل معادلة لابلاس $u = U(r)$ ذو التماثل الكروى سيتحدد من المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0.$$

وبتكامل هذه المعادلة نجد أن

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

حيث C_2 , C_1 ثابتان اختياريان . بوضع مثلاً $C_1 = 1, C_2 = 0;$ نحصل على الدالة

---

* وتكتب أيضا فى الصورة :

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

(ملاحظة المترجم) .

$$U_0 = \frac{1}{r}, \tag{35}$$

التى كثيرًا ما تسمى بالحل الأساسى لمعادلة لابلاس فى الفراغ .

وبالمثل بفرض

$$u = U(\rho)$$

وبالاستعانة بالمعادلة (33) أو (34) نعين الحل ذا التماثل الأسطوانى أو التماثل الدائرى (فى حالة المتغيرين المستقلين) على الصورة

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

وباختيار $C_1 = -1$ و $C_2 = 0$ سنجد أن

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \tag{36}$$

والدالة $U_0(\rho)$ كثيرًا ما تسمى بالحل الأساسى لمعادلة لابلاس فى المستوى (للمتغيرين المستقلين) .

والدالة $U_0 = \frac{1}{r}$ تحقق المعادلة $\Delta u = 0$ فى كل مكان إلا النقطة $r = 0$ حيث تؤول فيها إلى اللانهاية . وبدقة حتى معامل التناسب تنطبق هذه الدالة على مجال الشحنة النقطية e الموجودة فى نقطة أصل الإحداثيات . وجهد هذا المجال يساوى

$$u = \frac{e}{r}.$$

وبالمثل فالدالة $\ln \frac{1}{\rho}$ تحقق معادلة لابلاس فى كل مكان إلا النقطة $\rho = 0$ حيث تؤول فيها إلى اللانهاية (الموجبة) وبدقة حتى معامل ثابت تنطبق هذه الدالة على مجال الخط المشحون (انظر تفصيل هذا الموضوع فى بند ٥ - فقرة ٢) الذى جهده يساوى

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

حيث e_1 كثافة الشحنة فى وحدة الطول . وهاتان الدالتان لهما أهمية كبيرة فى نظرية الدوال التوافقية .

فقرة ٥ : الدوال التوافقية والدوال التحليلية فى المتغير المركب . تعتبر طريقة استخدام الدوال فى المتغير المركب لحل معادلة لابلاس فى حالة المسائل الثنائية الأبعاد (فى المستوى) طريقة عامة ومنتشرة للغاية .

نفرض أن

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

دالة ما فى المتغير المركب $z = x + iy$. علماً بأن v , u تعتبران دالتين حقيقيتين فى المتغيرين y , x . وتشكل أهمية بالغة ما يسمى بالدوال التحليلية التى توجد لها المشتقة :

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

والتغير $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ من الواضح أنه يمكن أن يؤول إلى الصفر بطرق كثيرة . ولكل طريقة من طرق اقتراب Δz إلى الصفر يمكن بوجه عام أن ينتج قيمة معينة للنهاية . غير أنه إذا كانت الدالة $w = f(z)$ تحليلية فإن النهاية $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ لا تعتمد على اختيار طريق الاقتراب إلى الصفر .

والشروط اللازمة والكافية لتحليلية الدالة هى ما يسمى بشروط كوشى ـ ريمان التالية :

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ويمكن الحصول على هذين الشرطين على سبيل المثال بالطريقة التالية :

نفرض أن $w = u + iv = f(z)$ دالة تحليلية . وبحساب المشتقات :

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz}$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{dz} z_y = i\frac{dw}{dz}$$

وبطلب تساوى قيمتى $\frac{dw}{dz}$ المحددتين بهاتين العلاقتين نحصل على :

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

ومن هنا تنتج شروط كوشى ـ ريمان . ولن نتوقف عند إثبات كفاية هذين الشرطين .

وفى نظرية الدوال فى المتغير المركب يتم إثبات أن الدالة التحليلية فى منطقة ما G فى المستوى $z = x + iy$ يكون لها فى هذه المنطقة مشتقات من جميع الرتب ويمكن تحليلها فى متسلسلة قوى . وكحالة خاصة يوجد لمثل هذه الدالة الدالتان $v(x, y)$. $u(x, y)$ ولهما مشتقات متصلة من الرتبة الثانية فى y و x .

وبتفاضل المتساوية الأولى من العلاقتين (37) بالنسبة إلى x والثانية بالنسبة إلى y نحصل على :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{أو} \quad \Delta_2 u = 0 .$$

وبنفس الطريقة بتغيير ترتيب عملية التفاضل نحصل على :

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{أو} \quad \Delta_2 v = 0 .$$

وبذلك فإن كلا من الجزء الحقيقى والجزء التخيلى للدالة التحليلية يحقق معادلة لابلاس . ويقال عادة إن الدالتين v . u اللتين تحققان شرطي كوشى ـ ريمان تعتبران دالتين توافقيتين مترافقتين .

ندرس التحويل

$$\left.\begin{aligned} x = x(u, v), \quad u = u(x, y), \\ y = y(u, v), \quad v = v(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

الذى يعكس انعكاسًا متبادلاً أحادى القيمة منطقة ما G من المستوى (x, y) فى منطقة G' من المستوى (u, v) بحيث إن كل نقطة من نقط المنطقة G تناظرها نقطة معينة فى المنطقة G' . وبالعكس كل نقطة من نقط المنطقة G' تناظرها نقطة معينة فى المنطقة G .

نفرض أن

$$U = U(x, y)$$

دالة ما حقيقية قابلة مرتين للتفاضل باتصال ومعرفة داخل المنطقة G .

نوضح كيف يتغير عند هذا التحويل مؤثر لابلاس على الدالة $U = U[x(u,v), y(u,v)] = \tilde{U}(u,v)$.

نحسب مشتقات الدالة

$$U_x = \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, \quad U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y,$$
$$U_{xx} = \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + \tilde{U}_v v_{xx},$$
$$U_{yy} = \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + \tilde{U}_v v_{yy},$$

ومن هنا نحصل على :

$$U_{xx} + U_{yy} = \tilde{U}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \\ + 2\tilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v(v_{xx} + v_{yy}). \quad (39)$$

وإذا كانت الدالتان v , u توافقيتين مترافقتين فإن التحويل (38) يكافئ التحويل المتحقق بالدالة التحليلية

$$w = f(z) = u + iv \qquad (z = x + iy). \quad (40)$$

وفى هذه الحالة ووفقًا لشرطى كوشى ـ ريمان (37) يجب أن تتحقق للدالتين v , u العلاقات التالية :

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$
$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

وتأخذ العلاقة (39) الصورة :

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv})|f'(z)|^2 \quad (41)$$

أو

$$\Delta_{uv}\tilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}U. \quad (41')$$

ومن هنا ينتج أنه بعد التحويل (40) تتحول الدالة $U(x,y)$ التوافقية فى المنطقة G إلى الدالة $\tilde{U} = U(u,v)$ التوافقية فى المنطقة G' فقط إذا كان $|f'(z)|^2 \neq 0$.

فقرة ٦ : تحويل مقلوبات متجهات الموضع * . عند دراسة الدوال التوافقية كثيرًا ما يستخدم تحويل مقلوبات متحهات الموضع . إن تحويل مقلوبات متجهات الموضع فى الكرة التى نصف قطرها a هو ذلك التحويل الذى يضع أية نقطة M فى تناظر مع النقطة M' الواقعة على نفس الشعاع الخارج من نقطة الأصل - الذى تقع عليه النقطة M - ويرتبط متجه موضعها r' بمتجه الموضع r للنقطة M بالعلاقة :

$$r'r = a^2 \quad \text{أو} \quad r' = \frac{a^2}{r} . \tag{42}$$

وفى المستقبل سنعتبر أن $a = 1$ وهو ما يمكن التوصل إليه دائمًا بتغيير مقياس رسم الأطوال .

نوضح أن الدالة التوافقية فى متغيرين مستقلين $u(\rho, \varphi)$ تتحول بتحويل مقلوبات متجهات الموضع إلى دالة توافقية :

$$v(\rho', \varphi) = u(\rho, \varphi) \quad \text{حيث} \quad \rho = \frac{1}{\rho'} . \tag{43}$$

بالفعل الدالة $u(\rho, \varphi)$ وبالتالى الدالة $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ كدالتين فى المتغيرين φ ، ρ تحققان الشروط :

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

و

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

وبالانتقال إلى المتغيرين φ ، ρ' نحصل على

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'},$$

ومن هنا ينتج أن $v(\rho', \varphi)$ تحقق المعادلة $\Delta_{\rho, \varphi} v = 0$ وذلك لأن

$$\rho'^2 \Delta_{\rho', \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

---

* vector position ويسمى فى المراجع السوفييتية بنصف القطر الموجه radius - vector (المترجم) .

وبالانتقال إلى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة نوضح أن الدالة

$$r=\frac{1}{r'} \quad \text{حيث} \quad v(r', \theta, \varphi)=ru(r, \theta, \varphi) \tag{44}$$

تحقق معادلة لابلاس $\Delta_{r', \theta, \varphi}v=0$ إذا كانت الدالة $u(r, \theta, \varphi)$ دالة توافقية فى متغيراتها $\Delta_{r, \theta, \varphi}u=0$.

ويسمى عادة التحويل (44) بتحويل كلفن.

ومن السهل التحقق بواسطة عملية التفاضل المباشر من أن الحد الأول فى مؤثر لابلاس (32) يتحول إلى الصورة:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \tag{45}$$

ومن ثم فإن

$$r\Delta_{r, \theta, \varphi}u=\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

أو

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

وبملاحظة أن

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial r'}\cdot\frac{\partial r'}{\partial r}=-r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},$$

نجد أن v تحقق المعادلة $\Delta_{r', \theta, \varphi}v=0$ وذلك لأن

$$r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+r'^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0,$$

أو

$$r'^4\Delta_{r', \theta, \varphi}v=0.$$

بند ٢ ـ الخواص العامة للدوال التوافقية

فى هذا البند نورد التمثيل التكاملى للدوال التوافقية الذى يعتبر جهازًا أساسيًا لدراسة الخواص العامة للدوال التوافقية. ويعتبر مبدأ القيمة العظمى، الذى

سنستخدمه كثيرًا فى المستقبل سواء عند إثبات نظرية الوحدانية أو عند حل المسائل الحدية ، إحدى النتائج الهامة للعلاقة التكاملية . وهنا أيضًا سنعطى الصياغة الرياضية للمسائل الحدية الداخلية والخارجية لمعادلة لابلاس وسنثبت وحدانية واستقرار حلول هذه المسائل .

فقرة ١ : علاقات جرين . التمثيل التكاملى للحل . عند دراسة المعادلات على النمط الناقصى سنستعين كثيرًا بعلاقات جرين التى تعتبر نتيجة مباشرة من علاقة اوستروجرادسكى .

وتكون علاقة اوستروجرادسكى فى أبسط حالة على الصورة :

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma R \cos\gamma\, d\sigma, \tag{1}$$

حيث T حجم ما محدود بسطح أملس بدرجة كافية Σ ، و $R(x, y, z)$ دالة اختيارية متصلة داخل $T + \Sigma$ ولها مشتقات متصلة داخل T ، و γ الزاوية بين اتجاه المحور z والعمودى الخارجى على Σ . وليس من الصعب التأكد من صحة هذه العلاقة بإجراء عملية التكامل بالنسبة إلى z .

وتكتب علاقة أوستروجرادسكى عادة على الصورة :

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau = \iint_\Sigma \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\}\, d\sigma, \tag{2}$$

حيث $d\tau = dx\, dy\, dz$ عنصر الحجم ، و $\alpha = (\widehat{nx}),\ \beta = (\widehat{ny}),\ \gamma = (\widehat{nz})$ الزوايا بين العمودى الخارجى n على السطح Σ والمحاور الإحداثية و P, Q, R دوال اختيارية قابلة للتفاضل* .

وإذا اعتبرنا P, Q, R مركبات متجه ما $A = Pi + Qj + Rk$ فإن علاقة اوستروجرادسكى (2) يمكن كتابتها فى الصورة التالية :

* فى المستقبل سنفترض أن علاقة أوستروجرادسكى قابلة للتطبيق على تلك المناطق التى سنتعامل معها . ومثل هذه السطوح هى على سبيل المثال السطوح ذات الانحناء المتقطع الاتصال وكذلك سطوح ليابونوف (انظر بند ٥) .

$$\iiint_T \operatorname{div} A\, d\tau = \iint_\Sigma A_n\, d\sigma, \qquad (2')$$

حيث

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

و

$$A_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

مركبة المتجه A على امتداد العمودى الخارجى.

ونتقل الآن إلى استنباط علاقات جرين.

نفرض أن $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ دالتان متصلتان هما ومشتقاتهما الأولى داخل $T + \Sigma$ ولها مشتقات من الرتبة الثانية متصلة داخل T .

بفرض أن

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

والاستعانة بعلاقة اوستروجرادسكى $(2')$ نصل إلى ما يسمى بعلاقة جرين الأولى :

$$\iiint_T u\,\Delta v\, d\tau = \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau, \quad (3)$$

حيث $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ مؤثر لابلاس ،

$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ المشتقة باتجاه العمودى الخارجى .

وإذا أخذنا فى الاعتبار العلاقة*

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},$$

---

* الرمز ∇ يسمى «نبلا» . والعلاقة المذكورة يسهل فهمها كحاصل ضرب قياسى لمتجهين اذا علمنا أن

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j + \frac{\partial u}{\partial z}\, u$$

ويسمى ∇ أحيانا بمؤثر هاميلتون (ملاحظة المترجم) .

فإن علاقة جرين يمكن التعبير عنها فى الصورة :

$$\iiint_T u\,\Delta v\,d\tau = -\iiint_T \nabla u\,\nabla v\,d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (3')$$

وبتغيير دورى الدالتين v ، u نحصل على :

$$\iiint_T v\,\Delta u\,d\tau = -\iiint_T \nabla v\,\nabla u\,d\tau + \iint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (4)$$

وبطرح المتساوية (4) من المتساوية (3′) نحصل على علاقة جرين الثانية

$$\iiint_T (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (5)$$

والمنطقة T يمكن أن تكون محدودة بعدة سطوح . وعلاقات جرين قابلة للتطبيق فى هذه الحالة أيضًا علمًا بأن التكاملات السطحية يجب أخذها على كل السطوح التى تحد المنطقة T .

وللدالتين $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ فى المتغيرين المستقلين تتحقق علاقات جرين المماثلة للسابقة . فعلاقة جرين الثانية فى المنطقة S التى حدودها C تكون على الصورة :

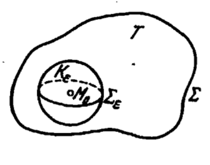
$$\iint_S (u\,\Delta_2 v - v\,\Delta_2 u)\,dS = \int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

حيث $dS = dx dy$ ، و ds عنصر طول القوس على امتداد C ، و $\Delta_2 v = v_{xx} + v_{yy}$ ، و $\frac{\partial}{\partial n}$ المشتقة باتجاه العمودى الخارجى n على المنحنى C .

وكما رأينا (بند ١ ، فقرة ٤) فإن الدالة $U_0(M) = \frac{1}{R}$ حيث $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ البعد بين النقطتين $M(x, y, z)$ و $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تحقق معادلة لإبلاس عندما $M \neq M_0$.

نفرض أن $u(M)$ دالة توافقية متصلة هى ومشتقاتها الأولى فى المنطقة $T + \Sigma$ ولها مشتقات من الرتبة الثانية فى T . ندرس الدالة $v = 1/R_{MM_0}$ حيث M_0

نقطة داخلية ما فى المنطقة T . وحيث إن هذه الدالة لها داخل T انفصال عند النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ فإنه لا يمكن تطبيق علاقة جرين الثانية تطبيقًا مباشرًا فى المنطقة T على الدالتين v , u . غير أن الدالة $v=1/R_{MM_0}$ محدودة فى المنطقة $T-K_\varepsilon$ ذات الحدود $\Sigma+\Sigma_\varepsilon$ حيث K_ε كرة نصف قطرها ε ومركزها فى النقطة M_0 وسطحها Σ_ε (شكل ٤٥) .



شكل ٤٥

بتطبيق علاقة جرين الثانية (5) على الدالتين $v=1/R$, u فى المنطقة $T-K_\varepsilon$ نحصل على :

$$\iiint\limits_{T-K_\varepsilon}\left(u\Delta\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\Delta u\right)d\tau=$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)d\sigma-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma. \quad (6)$$

وفى الطرف الأيمن لهذه المتساوية يعتمد التكاملان الثانى والثالث فقط على ε (التكامل الأول لا يعتمد على ε) . وبحساب المشتقة بالعمودى الخارجى للمنطقة $T-K_\varepsilon$ على Σ_ε نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\Sigma_\varepsilon}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2},$$

ومن هنا

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\,d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2u^*=4\pi u^*, \quad (7)$$

حيث u^* القيمة المتوسطة للدالة $u(M)$ على السطح Σ_ε . نختصر التكامل الثالث

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*=4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \quad (8)$$

حيث $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ القيمة المتوسطة للمشتقة العمودية $\frac{\partial u}{\partial n}$ على السطح الكروى Σ_ε . بالتعويض بالصيغتين (8) , (7) فى العلاقة (6) والأخذ فى الاعتبار أن

$\Delta(1/R)=0$ فى $T-K_\varepsilon$ نحصل على :

$$\iiint\limits_{T-K_\varepsilon}\left(-\frac{1}{R}\right)\Delta u\,d\tau=\iint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma+4\pi u^{*}-4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*}. \tag{9}$$

وبجعل نصف القطر ε يؤول إلى الصفر نحصل على :

١ ـ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u^{*}=u(M_0)$ وذلك لأن $u(M)$ دالة متصلة و u^{*} هى قيمتها المتوسطة على السطح الكروى ذى نصف القطر ε ومركزه فى النقطة M_0 ؛

٢ ـ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{*}=0$ لأنه ينتج من اتصال المشتقات الأولى للدالة $u(M)$ داخل T محدودية المشتقة العمودية

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

فى جوار النقطة M_0 ؛

٣ ـ وفقاً لتعريف التكامل المعتل (improper integral) يكون

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{T-K_\varepsilon}\left(-\frac{1}{R}\Delta u\right)d\tau=\iiint\limits_{T}\left(-\frac{1}{R}\Delta u\right)d\tau.$$

ونتيجة للانتقال إلى النهاية المذكور $\varepsilon\to 0$ نتوصل إلى علاقة جرين التكاملية الأساسية :

$$4\pi u(M_0)=-\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)-\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma_P-\iiint\limits_{T}\frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}}\,d\tau, \tag{10}$$

حيث $P=P(\xi,\eta,\zeta)$ نقطة ذات إحداثيات ξ,η,ζ واقعة على السطح Σ .

وإذا كانت النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T فإن $v=1/R_{MP}$ متصلة وتوافقية فى جميع نقط المنطقة T ، ولذا نحصل فى الطرف الأيسر من العلاقة (10) على صفر.

ندرس الحالة عندما M_0 تنتمى إلى السطح Σ . نفرض أن Σ له عند M_0 مستوى مماسى ميوله متصلة . والسطح الكروى Σ_ε الذى نصف قطره ε ومركزه

M_0 يقطع السطح Σ ويقسمه إلى جزأين Σ_2 , Σ_1 والجزء Σ_1 يقع داخل الكرة K_ε . نطبق علاقة جرين (5) على u و $v = 1/R$ فى المنطقة $T - T_1$ حيث T_1 المنطقة المحدودة بالسطح Σ_1 وبجزء السطح الكروى Σ'_ε الواقع داخل T . والشكل العام للتحليلات التى أدت إلى العلاقة (9) يظل هنا دون تغير. وعند ذلك ينبغى فقط الأخذ فى الاعتبار أن التكامل على $\Sigma_1 + \Sigma'_\varepsilon$ يؤول إلى $2\pi u(M_0)$ وإدخال التغيرات المناظرة فى (8′) , (8) , (7). وفى النهاية نتوصل إلى علاقة تنتج من (10) بوضع 2π بدلاً من 4π .

وبتوحيد هذه الحالات نكتب علاقة جرين الأساسية على الصورة

$$\Omega \cdot u(M_0) = $$
$$= \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) \right] d\sigma_P - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}} d\tau_P, \quad (10')$$

حيث Ω تأخذ القيم التالية :

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{إذا كانت النقطة } M_0 \text{ تقع داخل } T . \\ 2\pi & \text{إذا كانت النقطة } M_0 \text{ على الحدود } \Sigma . \\ 0 & \text{إذا كانت النقطة } M_0 \text{ تقع خارج } T . \end{cases}$$

ونشير إلى أنه إذا كانت النقطة M_0 هى عبارة عن رأس مخروطى للسطح Σ فإن $\Omega = \alpha$ حيث α الزاوية المجسمة (solid angle) بين مماسات السطح Σ عند النقطة M_0 .

وللدالة التوافقية حيث $\Delta u = 0$ تأخذ العلاقة (10) الصورة :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) \right] d\sigma_P \quad (11)$$

(M_0 داخل T) .

وبذلك فإن قيمة الدالة التوافقية فى أية نقطة داخلية فى المنطقة يعبر عنها بدلالة قيمة هذه الدالة ومشتقتها العمودية على سطح المنطقة . وعند ذلك يفترض اتصال

الدالة u ومشتقاتها الأولى فى المنطقة وعلى الحدود . ونشير فوراً إلى أن كل تكامل من التكاملين

$$\iint_{\Sigma} \mu(P)\frac{1}{R_{MP}}\,d\sigma_P \quad , \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)\,d\sigma_P, \qquad (12)$$

حيث ν , μ دالتان متصلتان ، يعتبر دالة توافقية خارج السطح Σ . بالفعل فحيث إن الدالتين المكاملتين وكل مشتقاتهما متصلة خارج السطح Σ فإن مشتقات الدالتين (12) من أية رتبة يمكن حسابها بواسطة عملية التفاضل تحت علامة التكامل . وعلاوة على ذلك ، حيث إن الدالتين

$$\frac{1}{R_{MP}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha_P+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\beta_P+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\gamma_P$$

تحققان معادلة لابلاس بالمتغيرات $M(x,y,z)$ ، فإنه وفقاً للمبدأ المعمم للتراكب (انظر المأخوذة صفحة ٢٦٤) تحقق الدالتان (12) أيضاً معادلة لابلاس بالمتغيرات x, y, z .

ومن هنا تنتج نتيجة هامة : أية دالة توافقية داخل منطقة توافقيتها تكون قابلة للتفاضل عدداً لانهائياً من المرات* . ونشير أيضاً إلى أن الدالة التوافقية تحليلية (تحلل فى متسلسلة قوى) فى أية نقطة M_0 من نقط المنطقة T . ويمكن التأكد من ذلك بواسطة تحليلات مبنية على أساس نفس هذا التمثيل التكاملى (11) .

وتتحقق علاقات مماثلة أيضاً للدوال التوافقية فى متغيرين اثنين مستقلين . نفرض أن S منطقة ما فى المستوى (x, y) محدودة بالمنحنى C ، و n هو اتجاه العمودى على هذا المنحنى ، الخارجى بالنسبة إلى المنطقة S .

بالفرض فى علاقة جرين الثانية أن $v=\ln(1/R_{M_0P})$ ، حيث

* إذا لم يتحقق للدالة u التوافقية داخل T شرط اتصالها هى ومشتقتها الأولى على السطح Σ فإن النظرية تحتفظ مع ذلك بصحتها وهو ما يمكن التأكد منه بإحاطة النقطة M بمنطقة واقعة هى وحدودها داخل T .

$R_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ هو بعد النقطة $P(x, y)$ عن نقطة مثبتة $M_0(x_0, y_0)$ ، وبإجراء تحليلات وخطوات مشابهة لتلك التى أجريناها لحالة المتغيرات الثلاثة المستقلة نحصل على علاقة جرين الأساسية فى المستوى :

$$\Omega u(M_0) = \int_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] ds_P -$$
$$- \iint_S \Delta u(P) \ln\frac{1}{R_{M_0P}} ds_P,$$

حيث

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi & \text{إذا كانت } M_0 \text{ تقع داخل } S \text{ ،} \\ \pi & \text{إذا كانت } M_0 \text{ تقع على } C \text{ ،} \\ 0 & \text{إذا كانت } M_0 \text{ تقع خارج } S \text{ .} \end{cases}$$

وإذا كانت $u(M)$ دالة توافقية داخل S وكانت النقطة M_0 تقع داخل S فإن :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] ds_P.$$

فقرة ٢ : بعض الخواص الأساسية للدوال التوافقية . نثبت بعض الخواص الهامة للدوال التوافقية :

١ ـ إذا كانت v دالة توافقية فى المنطقة T المحدودة بالسطح Σ فإن

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \qquad (13)$$

حيث S أى سطح مغلق يقع كلية فى المنطقة T .

بالفعل فبالتعويض فى علاقة جرين الأولى $(3')$ بدالة ما توافقية $v(\Delta v = 0)$ والدالة $u \equiv 1$ نحصل فوراً على العلاقة (13) . ومن العلاقة (13) ينتج أن المسألة الحدية الثانية ($\Delta u = 0$ فى T و $\left.\frac{\partial u}{\partial n} = f\right|_\Sigma$) يمكن أن يكون لها حل فقط بشرط أن

$$\iint_\Sigma f d\sigma = 0.$$

وخاصية الدوال التوافقية هذه يمكن تفسيرها بوصفها شرطًا لانعدام المصادر داخل المنطقة T

٢ ـ إذا كانت الدالة $u(M)$ توافقية فى منطقة ما T وكانت M_0 نقطة ما تقع داخل T فإن العلاقة التالية تتحقق :

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a} u\, d\sigma, \tag{14}$$

حيث Σ_a سطح كروى نصف قطره a ومركزه فى النقطة M_0 ويقع كلية فى المنطقة T (نظرية القيمة المتوسطة).

وتؤكد هذه النظرية أن قيمة الدالة التوافقية فى نقطة ما M_0 تساوى القيمة المتوسطة لهذه الدالة على أى سطح كروى Σ_a مركزه فى M_0 إذا كان هذا السطح الكروى Σ_a لا يخرج خارج منطقة توافقية الدالة $u(M)$.

نطبق العلاقة (11) على الكرة K_a التى مركزها فى النقطة M_0 وسطحها Σ_a :

$$4\pi u(M_0)=-\iint_{\Sigma_a}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma.$$

وبالأخذ فى الاعتبار أن $\frac{1}{R}=\frac{1}{a}$ على Σ_a وأن

$$\iint_{\Sigma_a}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0,\quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{\Sigma_a}=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{R=a}=-\frac{1}{a^2}$$

(ينطبق اتجاه العمودى الخارجى على Σ_a مع اتجاه نصف القطر) نحصل فوراً على (14)*.

---

* عند إثبات هذه النظرية استعنا بالمتساوية (13) التى تفترض وجود المشتقات على سطح الكرة . وإذا كانت الدالة $u(M)$ متصلة فى المنطقة المغلقة $T+\Sigma$ وتحقق المعادلة $\Delta u=0$ فقط فى النقط الداخلية من T فإن الاستنتاج السابق للسطح الكروى Σ_{a_0} الذى يمس Σ سيكون غير مبرر . إلا أن النظرية صحيحة لأى $a<a_0$ ، وبالانتقال إلى النهاية عندما $a\to a_0$ نحصل على :

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a_0^2}\iint_{\Sigma_{a_0}} u(M)\, d\sigma.$$

وبكتابة (14) على الصورة :

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \iint_{\Sigma_\rho} u(P)\, d\sigma_P$$

وإجراء التكامل بالنسبة إلى ρ من 0 إلى a نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \iiint_{K_a} u\, d\tau_P, \qquad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

أى أن $u(M_0)$ هى القيمة المتوسطة فى حجم الكرة K_a ذات الحدود Σ_a .

ولحالة المتغيرين المستقلين تكون نظرية القيمة المتوسطة المماثلة صحيحة أيضًا :

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u\, ds, \tag{15}$$

حيث C_a محيط دائرة نصف قطرها a ومركزها فى النقطة M_0 ، ويقع فى منطقة توافقية u .

٣ ـ إذا كانت الدالة $u(M)$ معرفة ومتصلة فى المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ وتحقق المعادلة $\Delta u = 0$ داخل T فإن الدالة $u(M)$ تصل إلى قيمها العظمى والصغرى على السطح Σ (مبدأ القيمة العظمى) .

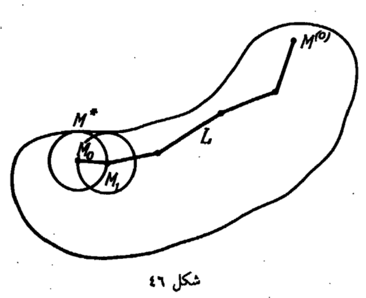
نفرض أن الدالة $u(M)$ تصل إلى قيمتها العظمى فى نقطة داخلية ما M_0 من نقط المنطقة T ، ومن ثم فإن $u_0 = u(M_0) \geqslant u(M)$ حيث M أية نقطة فى المنطقة T . نحيط النقطة M_0 بسطح كروى Σ_ρ نصف قطره ρ ويقع بأكمله داخل المنطقة T . وحيث إن $u(M_0)$ هى حسب الفرض أكبر قيمة للدالة $u(M)$ فى $T + \Sigma$ فإن $u|_\Sigma \leqslant u(M_0)$. وبالاستعانة بنظرية القيمة المتوسطة (14) ووضع $u(M_0)$ بدلاً من $u(M)$ تحت علامة التكامل نحصل على :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M)\, d\sigma_M \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M_0)\, d\sigma = u(M_0). \tag{16}$$

وإذا افترضنا أنه $u(M) < u(M_0)$ ولو فى نقطة واحدة M من نقط السطح الكروى Σ_ρ فمن الواضح أنه سيكون لدينا العلامة $<$ بدلاً من العلامة $\leqslant$ مما

يؤدى إلى تناقض . وبذلك فعلى كل السطح Σ_ρ يكون $u(M) = u(M_0)$.

وإذا كانت ρ_0^m هى أصغر بعد من M_0 إلى السطح Σ فإن $u(M) = u(M_0)$ لجميع النقط الواقعة داخل $\Sigma_{\rho_0^m}$. ومن هنا ينتج أنه فى النقط M^* المنتمية إلى الأجزاء المشتركة بين Σ , $\Sigma_{\rho_0^m}$ يكون وفقاً للاتصال $u(M^*) = u(M_0)$ وهذا يثبت النظرية نظراً لأننا تأكدنا أن القيمة العظمى $u(M_0)$ تصلها الدالة فى نقط الحدود M^* .



شكل ٤٦

وليس من الصعب التأكد من أنه إذا كانت المنطقة T منطقة متصلة وكانت الدالة تصل إلى قيمتها العظمى ولو فى نقطة واحدة داخلية M_0 فإن $u(M) = u(M_0)$ فى كل المنطقة . نفرض أن $M^{(0)}$ نقطة ما أخرى من نقط المنطقة T . نوصل النقطة $M^{(0)}$ بالنقطة M_0 بالخط المنكسر L (شكل ٤٦) الذى نرمز لطوله بالحرف l . نفرض أن M_1 هى النقطة الأخيرة لمخرج L من $\Sigma_{\rho_0^m}$. وفى هذه النقطة $u(M_1) = u(M_0)$. نرسم حول هذه النقطة سطحاً كروياً $\Sigma_{\rho_0^m}$ نصف قطره ρ_1^m (مركزه فى M_1) ويمس Σ ونفرض أن M_2 هى آخر نقطة لمخرج L من $\Sigma_{\rho_1^m}$. وفى هذه النقطة $u(M_2) = u(M_0)$. وبالاستمرار فى هذه العملية نحصل على أنه ليس بعد أكثر من $p = l/\rho^{(m)}$ خطوة ، حيث $\rho^{(m)}$ أصغر بعد بين الخط L و Σ ، سيحيط أحد السطوح الكروية بالنقطة $M^{(0)}$ ومنها ينتج أن $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. ووفقاً للطابع الاختيارى للنقطة $M^{(0)}$ واتصال $u(M)$ فى المنطقة المغلقة $T + \Sigma$ نستنتج أن $u(M) = u(M_0)$ فى كل مكان بما

فى ذلك نقط الحدود. وبذلك فمن بين جميع الدوال التوافقية تصل الدالة الثابتة فقط إلى نهايتها العظمى فى النقط الداخلية للمنطقة.

ويمكن إثبات نظرية مماثلة للقيمة الصغرى.

نتيجة ١. إذا كانت الدالتان U , u متصلتين فى المنطقة $T+\Sigma$ وتوافقيتين فى T وكان

$$U \geqslant u \text{ على } \Sigma ،$$

فإن

$$U \geqslant u \text{ فى كل مكان داخل } T.$$

بالفعل فالدالة $U-u$ متصلة فى $T+\Sigma$ وتوافقية فى T و

$$U-u \geqslant 0 \text{ على } \Sigma.$$

ووفقاً لمبدأ القيمة العظمى يكون

$$U-u \geqslant 0 \text{ فى كل مكان داخل } T ،$$

ومن هنا تنتج صحة منطوقنا.

نتيجة ٢. إذا كانت الدالتان U , u متصلتين فى المنطقة $T+\Sigma$ وتوافقيتين فى T وكان

$$|u| \leqslant U \text{ على } \Sigma ،$$

فإن

$$|u| \leqslant U \text{ فى كل مكان داخل } T.$$

ومن شروط النظرية ينتج أن الدوال التوافقية الثلاث $(-U, u, U)$ تحقق الشروط

$$-U \leqslant u \leqslant U \text{ على } \Sigma.$$

وبتطبيق النتيجة ١ مرتين نحصل على :

$$-U \leqslant u \leqslant U \text{ فى كل مكان داخل } T ،$$

أو

$|u| \leqslant U$ داخل T.

<u>نتيجة ٣</u>. للدالة $u(M)$ التوافقية فى T والمتصلة فى $T+\Sigma$ تتحقق المتباينة $|u| \leqslant \max|u||_{\Sigma}$ فى كل مكان داخل T . ولإثبات ذلك نضع $U = \max|u||_{\Sigma}$ونستعين بالنتيجه ٢ .

ورغم أن الشرح ورد لحالة الفراغ الثلاثى الأبعاد إلا أن النتائج تعمم على حالة الدوال التوافقية فى أى عدد من المتغيرات .

فقرة ٣ : وحدانية واستقرار المسألة الحدية الأولى . نفرض أنه معطاة المنطقة T المحدودة بالسطح المغلق Σ المعطى عليه دالة ما f . وفى الحالة المبسطة عندما تكون الدالة الحدية f متصلة تصاغ عادة المسألة الحدية الداخلية الأولى (مسألة ديريشليت الداخلية) لمعادلة لابلاس على الوجه التالى :

المطلوب تعيين الدالة u التى

(أ) تكون معرفة ومتصلة فى المنطقة المغلقة $T+\Sigma$ بما فى ذلك الحدود ؛

(ب) تحقق داخل المنطقة T المعادلة $\Delta u = 0$ ؛

(جـ) تأخذ على حدود Σ قيم f المعطاة .

وفى الشرط (أ) يفترض توافقية الدالة داخل المنطقة T . وطلب التوافقية على الحدود يعتبر مطلبًا زائدًا عن الحاجة لأنه كان سيؤدى إلى تقييد إضافى للقيم الحدية .

وشرط اتصال u فى المنطقة المغلقة (أو أى شرط آخر يوضح معنى أن الدالة u تأخذ على الحدود القيم المعطاة) هو شرط ضرورى لوحدانية الحل . وإذا رفضنا هذا الشرط فإن أية دالة مساوية للثابت C داخل T وللدالة المعطاة f على Σ يمكن اعتبارها حلاً للمسألة لأنها تحقق الشرطين (ب) ، (جـ).

نثبت نظرية الوحدانية :

المسألة الحدية الداخلية الأولى لمعادلة لابلاس لا يمكن أن يكون لها حلان مختلفان .

نفرض أنه توجد دالتان مختلفتان u_2 ، u_1 تعتبران حلين للمسألة أى أنهما دالتان متصلتان فى المنطقة المغلقة $T+\Sigma$ تحققان داخل المنطقة معادلة لابلاس وتأخذان على السطح Σ نفس قيم الدالة f . والفرق بين الدالتين $u = u_1 - u_2$ له الخواص التالية :

١ ـ $\Delta u = 0$ داخل المنطقة T ؛

٢ ـ u دالة متصلة فى المنطقة المغلقة $T+\Sigma$ ؛

٣ ـ $u|_\Sigma = 0$.

وهكذا فالدالة $u(M)$ متصلة وتوافقية فى المنطقة T وتساوى الصفر على الحدود . وكما هو معلوم فإن أية دالة متصلة تصل فى المنطقة المغلقة إلى قيمتها العظمى . ولنتأكد من أن $u \equiv 0$. إذا كانت الدالة $u \not\equiv 0$ وكانت ولو فى نقطة واحدة $u > 0$ فإنها يجب أن تصل إلى قيمتها العظمى الموجبة داخل المنطقة وهو ما لا يمكن حدوثه . وبالمثل تماما نثبت أن الدالة u لا يمكن أن تأخذ داخل T قيما سالبة . ومن هنا ينتج أن

$$u \equiv 0 .$$

وننتقل الآن إلى إثبات الاعتماد المتصل لحل المسألة الحدية الأولى على المعطيات الحدية . ونذكر القارئ بأن المسألة تسمى بالمسألة المحددة فيزيائيًّا إذا كان التغير الصغير فى الشروط التى تحدد الحل ، وهى فى حالتنا الشروط الحدية ، يناظره تغير صغير فى الحل نفسه .

نفرض أن u_1 , u_2 دالتان متصلتان فى $T+\Sigma$ وتوافقيتان داخل T وتتحقق لها المتباينة $|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$ على Σ . عندئذ تتحقق هذه المتباينة داخل T .

وهذه الحقيقة تنتج مباشرة من النتيجة ٢ صفحة ٣٤٨ ، وذلك نظرًا لأن $U \equiv \varepsilon$ تعتبر دالة توافقية .

وبذلك أثبتنا الاعتماد المتصل للحل على الشروط الحدية ووحدانية المسألة الحدية الداخلية الأولى .

فقرة ٤ : المسائل ذات الشروط الحدية المنفصلة. كثيرا ما تقابلنا أيضًا المسألة الحدية الأولى بشروط حدية منفصلة. والدالة المتصلة فى المنطقة المغلقة لا يمكن أن تكون حلاً لهذه المسألة. ولذا فإنه يلزم تدقيقًا لصياغة المسألة الحدية الأولى أن نأخذ فى الاعتبار هذه الحالة محل البحث.

نفرض أنه على المنحنى C الذى يحد المنطقة S فى المستوى (x, y) معطاة دالة متقطعة الاتصال $f(P)$. والمطلوب تعيين الدالة $u(M)$: (١) التوافقية داخل المنطقة S ، (٢) التى تؤول باتصال إلى القيم الحدية فى نقط اتصال الأخيرة ، (٣) المحدودة فى المنطقة المغلقة $S + C$.

ونشير إلى أن المطلب الإضافى للتحديد يتعلق عمليًا بجوارات نقط انفصال الدالة $f(P)$.

نثبت النظرية التالية :

حل المسألة الحدية الأولى بالقيم الحدية المتقطعة الاتصال هو حل وحيد.

نفرض أن u_2 , u_1 حلان للمسألة المصاغة. والفرق

$$v = u_1 - u_2$$

١ ـ يكون دالة توافقية داخل S ؛

٢ ـ يؤول باتصال إلى القيم الحدية الصفرية على الحدود فيما عدا نقط انفصال $f(P)$ حيث يمكن أن يكون لهذا الفرق انفصالات ؛

٣ ـ يكون محدودًا فى $S + C$: $|v| < A$.

نكوّن الدالة التوافقية التالية :

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{D}{r_i},$$

حيث ε عدد اختيارى موجب ، D قطر المنطقة ، r_i بعد النقطة M محل الدراسة عن نقطة الانفصال P_i رقم i . الدالة $U(M)$ موجبة لأن كل الحدود أكبر من الصفر.

نرسم فى كل نقطة انفصال P_i دائرة K_i نصف قطرها δ باختيار δ بحيث يكون كل حد

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

على محيط الدائرة المناظرة C_i أكبر (أو يساوى) من A أى بحيث يكون $\varepsilon \ln \frac{D}{\delta} \geqslant A$ والدالة v متصلة فى المنطقة المغلقة $S - \sum_{i=1}^{n} K_i = S'$ و $|v| \leqslant U$ على حدود هذه المنطقة.

ولذا فوفقا لمبدأ القيمة العظمى تكون U حداً أعظم (majorant) للدالة v :

$$|v(M)| \leqslant U(M).$$

وبتثبيت نقطة اختيارية M من المنطقة S وجعل $\varepsilon \to 0$ نحصل على :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0;$$

وبالتالى

$$v(M) = 0$$

لأن v لاتعتمد على ε ، أو

$$u_1 \equiv u_2,$$

وهو المطلوب إثباته.

فقرة ٥ : النقط المنفردة المعزولة (isolated singular points) . ندرس النقط المنفردة للدالة التوافقية. نفرض أن P هى نقطة منفردة معزولة تقع داخل منطقة توافقية الدالة u . وتوجد حالتان محتملتان :

١ ــ الدالة التوافقية محدودة فى جوار النقطة P ؛

٢ ــ الدالة التوافقية ليست محدودة فى جوار النقطة P . وقد قابلنا فيما سبق لنقط المنفردة من النوع الثانى (على سبيل المثال $\ln(1/r)$) . وتبين النظرية التالية أن النوع الأول من النقط المنفردة لا يمكن تحقيقه.

إذا كانت الدالة المحدودة $u(M)$ توافقية داخل المنطقة S فيما عدا النقطة P فإنه يمكن تعريف $u(P)$ بحيث تكون الدالة $u(M)$ توافقية في كل مكان داخل S .

نأخذ دائرة K_α نصف قطرها α ومركزها في النقطة P ، وتقع بأكملها داخل S ، وندرس داخلها الدالة التوافقية v التي تنطبق على الدالة u على محيط C_α ــ محيط الدائرة K_α * .

نكون الفرق

$$w = u - v,$$

الذى يكون :

١ ــ توافقيًّا في كل مكان داخل K_α عدا النقطة P حيث لا يكون w معرفا ؛

٢ ــ يؤول باتصال إلى الشروط الحدية الصفرية على C_α ؛

٣ ــ محدودا في المنطقة المغلقة $K_\alpha + C_\alpha (|w| < A)$.

وبالمثل كما في إثبات النظرية السابقة (فقرة ٤) ، نكون الدالة التوافقية غير السالبة

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{\alpha}{r}.$$

وهنا ε عدد اختيارى موجب ، α نصف قطر الدائرة K_α ، r بعد النقطة M محل الدراسة عن نقطة الانفصال P .

نرسم دائرة K_δ مركزها في النقطة P باختيار نصف قطرها δ بحيث تكون قيمة U على محيط هذه الدائرة أكبر (أو تساوى) A وندرس المنطقة $K_\alpha - K_\delta$. والدالة w متصلة في المنطقة المغلقة $\delta \leqslant r \leqslant \alpha$ ، وعلى حدود هذه المنطقة تتحقق المتباينة $U \leqslant |w|$. ووفقا لمبدأ القيمة العظمى تعتبر الدالة غير السالبة U حلًّا أعظم (majorant) للدالة w :

$$|w| \leqslant U(M) \text{ في المنطقة } \delta \leqslant r \leqslant \alpha .$$

* سيتم إثبات وجود مثل هذه الدالة في بند ٣ ولا تؤسس طريقة تكوينها على النظرية الحالية .

وبتثبيت نقطة اختيارية M من المنطقة K_α وغير منطبقة على P والانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0,$$

وبالتالي فى كل مكان ، ربما فيما عدا النقطة P ، يكون

$$w = 0$$

وبذلك فالدالة u فى كل مكان فى المنطقة S فيما عدا النقطة P تنطبق على الدالة v . وبفرض أن $u(P) = v(P)$ نحصل على الدالة $u \equiv v$ التوافقية فى كل مكان داخل المنطقة S . وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية.

وبالمثل يتم إثبات النظرية لحالة الفراغ الثلاثى الأبعاد حيث يمكن أن تؤخذ الدالة $U(M) = \varepsilon\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$ بمثابة الدالة ـ الحد الأعظم.

لقد افترضنا عند إثبات نظريات هذه الفقرة أن الدالة u محدودة فى جوار النقطة P . غير أن نفس هذه التحليلات تحتفظ بصحتها إذا ما افترضنا أن الدالة u فى جوار النقطة P تحقق المتباينة

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \tag{17}$$

حيث $\varepsilon(r)$ دالة اختيارية تؤول إلى الصفر عندما $r \to 0$ ، أى أنه فى جوار النقطة P تتزايد الدالة $u(M)$ أبطأ من $\log(1/r_{PM})$.

وهكذا إذا كانت الدالة $u(M)$ دالة توافقية داخل المنطقة S فيما عدا النقطة P حيث تتزايد فى جوار هذه النقطة P أبطأ من $\log(1/r_{MP})$ عندما $M \to P$ ، فإن هذه الدالة تكون محدودة فى جوار النقطة P ، ويمكن تعيين قيمة $u(P)$ بحيث تكون الدالة u دالة توافقية فى كل المنطقة S .

وبالمثل فى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة : إذا كانت الدالة التوافقية $u(M)$ فى جوار النقطة المنفردة المعزولة P تتزايد أبطأ من $1/r$ ،

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \begin{pmatrix} \varepsilon(r) \to 0 \\ r \to 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

فإنها تكون محدودة فى جوار هذه النقطة ويمكن تعيين قيمة $u(P)$ بحيث تكون الدالة $u(M)$ توافقية فى النقطة P أيضا .

فقرة ٦ : انتظام الدالة التوافقية فى ثلاثة متغيرات فى اللانهاية . الدالة التوافقية فى ثلاثة متغيرات $u(x, y, z)$ تسمى دالة منتظمة (regular) فى اللانهاية إذا كان

$$|u| < \frac{A}{r} \quad , \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2} \qquad (19)$$

عند قيم r الكبيرة كبرا كافيا $r \geqslant r_0$.

نثبت أنه إذا كانت الدالة $u(x, y, z)$ توافقية خارج سطح ما مغلق Σ وتؤول بانتظام إلى الصفر فى اللانهاية فإنها تكون منتظمة (regular) فى اللانهاية .

وشرط التقارب المنتظم إلى الصفر فى اللانهاية يعنى أنه توجد تلك الدالة $\varepsilon^*(r)$ بحيث إن

$$|u(M)| < \varepsilon^*(r) \quad (\varepsilon^*(r) \to 0 \text{ عندما } r \to \infty) \text{ ،} \qquad (20)$$

حيث r متجه موضع النقطة M .

وبإجراء تحويل كلفن

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi),$$

حيث

$$r' = \frac{1}{r},$$

نجد أن الدالة v توافقية فى كل مكان داخل السطح Σ' ، الذى يتحول إليه السطح Σ عند تحويل مقلوبات متجهات الموضع ، فيما عدا نقطة الأصل حيث يكون لهذه الدالة نقطة منفردة معزولة .

ومن الشرط (20) ينتج أنه فى جوار نقطة الأصل تتحقق للدالة v المتباينة

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{1}{r'} = \varepsilon(r')\frac{1}{r'},$$

حيث

$$\varepsilon(r') = \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right) \to 0 \quad \text{عندما} \quad r' \to 0.$$

وعلى أساس النظرية الأخيرة من فقرة ٥ تكون $v(r', \theta, \varphi)$ دالة محدودة وتوافقية عندما $r' \leqslant r'_0$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant A \quad \text{عندما} \quad r' \leqslant r'_0 \text{ ،} \tag{21}$$

ومن هنا ينتج أن

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leqslant \frac{A}{r} \quad \text{عندما} \quad r \geqslant r_0 = \frac{1}{r'_0} \text{ ،}$$

ووفقا لتوافقية الدالة v عند $r' = 0$ يمكننا أن نكتب :

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} \cdot v(x', y', z')\right) =$$
$$= -\frac{x}{r^3} \cdot v + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x}\right], \tag{22}$$

حيث

$$x' = \frac{x}{r} r', \quad y' = \frac{y}{r} r', \quad z' = \frac{z}{r} r'.$$

ومن هنا بحساب المشتقات $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial x}$ والأخذ فى الاعتبار محدودية المشتقات الأولى للدالة v فى جوار النقطة $r' = 0$ نحصل على :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^2} \quad \text{عندما} \quad r \to \infty \text{ .}$$

وتكون التقديرات المماثلة صحيحة أيضا للمشتقتين $\frac{\partial u}{\partial z}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$.

فقرة ٧ : المسائل الحدية الخارجية . وحدانية الحل للمسائل الثلاثية والثنائية الأبعاد . تختلف صياغة المسائل الحدية الخارجية فى حالة المتغيرين المستقلين عنها فى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة .

ندرس فى البداية حالة المتغيرات الثلاثة . نفرض أن T هى المنطقة الخارجية بالنسبة إلى سطح ما مغلق Σ .

المسألة الحدية الخارجية الأولى (مسألة ديريشليت الخارجية) تنحصر فى الآتى :

المطلوب تعيين الدالة $u(x, y, z)$ التى تحقق الشروط :

١ ـ $\Delta u = 0$ فى المنطقة اللامحدودة T ؛

٢ ـ u متصلة فى كل مكان بما فى ذلك السطح Σ ؛

٣ ـ $u|_\Sigma = f(x, y, z)$ حيث f دالة معطاة على السطح Σ ؛

٤ ـ $u(M)$ تؤول بانتظام إلى الصفر فى اللانهاية : $u(M) \to 0$ عندما $M \to \infty$.

والشرط الأخير يعتبر شرطا جوهريًا لوحدانية الحل وذلك يمكن التأكد منه على مثال بسيط . نفرض أن المطلوب حل المسألة الحدية الخارجية الأولى للسطح الكروى S_R الذى نصف قطره R بالشرط الحدى الثابت

$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0 .$$

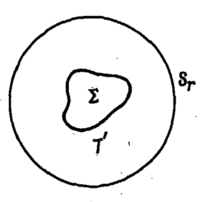
وبإهمال الشرط (٤) نرى أن حلول المسألة يمكن أن تكون الدالتان $u_1 = f_0$ ، $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$ وكذلك أية دالة

$u = \alpha u_1 + \beta u_2$ حيث $\alpha + \beta = 1$.

نثبت أن

المسألة الحدية الخارجية الأولى للدوال التوافقية فى متغيرات ثلاثة مستقلة لها حل وحيد . بفرض وجود حلين u_1 ، u_2 يحققان الشروط (١) ـ (٤) نرى أن الفرق $u = u_1 - u_2$ هو عبارة عن حل المسألة بالشروط الحدية الصفرية . وحيث إن الشرط (٤) يتحقق أيضا للدالة u فإنه لأى $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين R^* بحيث إن

$|u(M)| < \varepsilon$ عندما $r \geqslant R^*$.



شكل ٤٧

وإذا كانت النقطة $\overline{M}$ تقع داخل المنطقة T' (شكل ٤٧) المحصورة داخل السطح Σ والسطح الكروى S_r $(r \geqslant R^*)$ فإن $(\overline{M}) < \varepsilon$ كما ينتج من مبدأ القيمة العظمى مطبقا على المنطقة T' . ووفقا للطابع الاختيارى للبارامتر ε

نستنتج أن $u \equiv 0$ فى المنطقة T' وكذلك فى كل المنطقة T مما يثبت وحدانية حل المسألة الحدية الأولى الخارجية فى الفراغ .

المسألة الحدية الخارجية الأولى فى المستوى تصاغ على الوجه التالى :

المطلوب تعيين الدالة u التى تحقق الشروط :

١ ـ $\Delta u = 0$ فى المنطقة اللانهائية Σ المحدودة بالمنحنى C ؛

٢ ـ الدالة u متصلة فى كل مكان بما فى ذلك على C ؛

٣ ـ $u|_C = f(x, y)$ حيث f دالة معطاة على C ؛

٤ ـ $u(M)$ محدودة فى المالانهاية أى يوجد ذلك العدد N بحيث يكون $|u(M)| \leqslant N$.

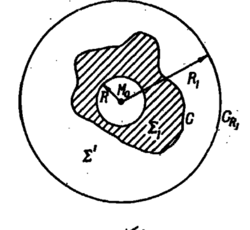
ويتضح أن مطلب أن يؤول الحل إلى الصفر فى المالانهاية يعتبر هنا أيضا كافيا لإثبات أنه لا يمكن وجود حلين مختلفين ، ولكن هذا المطلب يعتبر قويًّا للغاية لأن المسألة به قد تصبح غير قابلة للحل عامة .

نثبت أن المسألة الحدية الخارجية الأولى للدالة فى متغيرين لها حل وحيد .

بفرض وجود حلين مختلفين u_1 , u_2 وبدراسة الفرق بينهما $u = u_1 - u_2$ الذى يعتبر حلاً للمسألة الحدية بالشروط الحدية الصفرية سيكون لدينا وفقا للشرط (٤) ما يلى :

$$|u| \leqslant N = N_1 + N_2,$$

حيث N_1 , N_2 هما عددان بحيث إن $|u_1| \leqslant N_1$, $|u_2| \leqslant N_2$. نرمز بالرمز Σ_1 للمنطقة الواقعة داخل C والتى تعتبر مكملة للمنطقة Σ بحيث يكون $\Sigma + \Sigma_1$ هى كل المستوى . نأخذ النقطة M_0 داخل Σ_1 ودائرة نصف قطرها R ومركزها فى النقطة M_0 تقع داخل Σ_1 (شكل ٤٨) . والدالة التوافقية $\ln(1/R_{MM_0})$ ليس لها نقط منفردة فى المنطقة Σ ، والدالة $\ln(R_{MM_0}/R)$ موجبة فى كل المنطقة Σ بما فى ذلك C . نفرض أن C_{R_1} محيط دائرة نصف قطرها R_1 ومركزها فى M_0 ، تحتوى



شكل ٤٨

كلية المنحنى C ، و Σ' المنطقة المحدودة بالمنحنيين C_{R_1} , C . الدالة u_{R_1} المعرفة بالمتساوية

$$u_{R_1} = N\frac{\ln (R_{MM_0}/R)}{\ln (R_1/R)} \tag{23}$$

هى دالة توافقية تساوى N على محيط الدائرة التى نصف قطرها R_1 وموجبة على C ؛ ومن مبدأ القيمة العظمى ينتج أن u_{R_1} تكون حلاً أعظم للقيمة المطلقة للدالة $u(M)$ فى المنطقة Σ ؛

$$|u(M)| < u_{R_1}(M).$$

نثبت النقطة M ونجعل R_1 يتزايد بلا حدود. من الواضح أن $u_{R_1}(M) \to 0$ عندما $R_1 \to \infty$ ، ومن هنا ينتج أن

$$u(M) = 0.$$

وبذلك فوفقا للطابع الاختيارى للنقطة M أثبتنا وحدانية حل المسألة المصاغة. ووحدانية حل هذه المسألة يمكن أيضا إثباته بالاستعانة بتحويل مقلوبات متجهات الموضع الذى يحول المنطقة الخارجية بالنسبة إلى المنحنى C إلى منطقة داخلية بالنسبة إلى المنحنى C' الذى يتحول إليه المنحنى C .

وعند ذلك تتحول النقطة البعيدة بعدا لانهائيًّا إلى نقطة منفردة معزولة تكون الدالة v فى جوارها محدودة. ومن نظريات الفقرة ٥ تنتج توافقية الدالة v فى نقطة الأصل ومن ثم وحدانية الحل.

ومن هذه التصورات الواردة ينتج أن الدالة التوافقية فى متغيرين $u(M)$ المحدودة فى اللانهاية تؤول إلى نهاية معينة عندما تؤول M إلى اللانهاية.

ويمكن توضيح الاختلاف فى صياغة المسألة الحدية الخارجية الأولى فى حالة المتغيرين والثلاثة متغيرات على المثال الفيزيائى التالى : نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها R يحتفظ على سطحها بدرجة حرارة u_0 ثابتة والمطلوب تعيين التوزيع المستقر لدرجة الحرارة فى الفراغ الخارجى. الدالة $u = u_0(R/r)$ تمثل حل المسألة الذى يؤول إلى الصفر فى اللانهاية.

ندرس الآن المسألة الثنائية الأبعاد ونفرض أنه على محيط دائرة نصف قطرها R معطاة القيمة الحدية الثابتة

$$u|_{\Sigma} = f_0 = \text{const}.$$

وفى هذه الحالة فإن $u \equiv f_0$ هو الحل المحدود الوحيد للمسألة ولا يوجد أى حل آخر يؤول إلى الصفر فى المالانهاية. وقد سبق أن قابلنا الطابع المختلف اختلافا جوهريًا بين سلوك الدوال التوافقية فى المالانهاية فى حالتى المتغيرين والثلاثة متغيرات مستقلة (على سبيل المثال سلوك $1/r$ و $\ln 1/r$ فى المالانهاية).

والمناطق اللامحدودة الفراغية والمستوية يتحقق مبدأ القيمة العظمى. ولا يصعب التأكد من ذلك بواسطة إجراء تحليلات مماثلة لتلك التى استعنا بها عند إثبات نظريات الوحدانية. ومن هنا ينتج بدوره الاعتماد المتصل للحل على الشروط الحدية.

فقرة ٨ : المسألة الحدية الثانية. نظرية الوحدانية. إن حل المسألة الحدية الثانية هو الدالة u المتصلة فى $T+\Sigma$ والتى تحقق على السطح Σ الشرط

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M).$$

نثبت أن حل المسألة الحدية الداخلية الثانية (مسألة نيمان الداخلية) يتحدد بدقة أقصاها ثابت اختيارى.

نجرى الإثبات بفرض إضافى هو أن الدالة u لها مشتقات أولى متصلة فى المنطقة $T+\Sigma$ *.

نفرض أن u_1 , u_2 دالتان قابلتان للتفاضل باتصال فى $T+\Sigma$ تحققان المعادلة $\Delta u = 0$ فى T والشرط $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M)$ على Σ. للدالة $u = u_1 - u_2$ سنحصل على :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

* الفرض المتعلق باتصال المشتقات الأولى فى $T+\Sigma$ فرض لتبسيط الإثبات. وإثبات الوحدانية بفروض أكثر عمومية قام به العالمان السوفييتيان م. كلديش وم. لافرينتيف عام ١٩٣٧.

وبوضع $v=u$ فى علاقة جرين الأولى (3) والأخذ فى الاعتبار العلاقتين $\Delta u=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma}=0$ نحصل على :

$$\iiint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau=0.$$

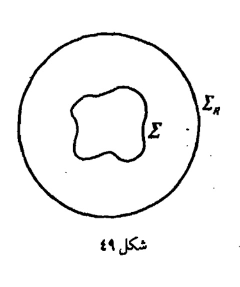
ومن هنا ووفقا لاتصال الدالة u ومشتقاتها الأولى ينتج أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\equiv 0$$ ، أى أن $u\equiv \text{const}$ ،

وهو المطلوب إثباته .

وطريقة الإثبات الواردة هنا يمكن تطبيقها أيضا فى حالة المنطقة اللامحدودة للدوال التى تحقق شروط الانتظام فى المالانهاية .

نوضح أنه فى حالة المنطقة اللامحدودة الخارجية بالنسبة إلى السطح المغلق تكون علاقة جرين (3) قابلة للتطبيق على الدوال المنتظمة (regular) فى المالانهاية .



شكل ٤٩

ندرس المنطقة T الخارجية بالنسبة إلى السطح المغلق Σ . نأخذ سطحا كرويًّا Σ_R ذا نصف قطر كبير بحيث يقع Σ داخل Σ_R . نرمز بالرمز T_R إلى المنطقة المحدودة بالسطحين $\Sigma_R\ ,\ \Sigma$ (شكل ٤٩) . وبتطبيق علاقة جرين فى المنطقة T_R على الدالتين $v\ ,\ u$ المنتظمتين فى المالانهاية نحصل على :

$$\iiint_{T_R} u\,\Delta v\, d\tau=-\iiint_{T_R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\tau+$$

$$+\iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma+\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (24)$$

نقدر التكامل المأخوذ على Σ_R بالاستعانة بخاصية انتظام الدالتين $v\ ,\ u$:

$$\left|\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma\right| = \left|\iint_{\Sigma_R} u\,(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,d\sigma\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\iint_{\Sigma_R}\frac{A}{R}\cdot\frac{3A}{R^2}\,d\sigma\right| \leqslant \frac{3A^2}{R^3}4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

ومن هنا نرى أن

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

والتكامل فى الطرف الايمن من (24) المأخوذ على T_R يؤول إلى التكامل المأخوذ على كل المنطقة T عندما $R\to\infty$. وهذا التكامل موجود لأن الصيغة المكاملة تتلاشى مثل $1/R^4$ فى اللانهاية وذلك نظرا لانتظام الدالتين v , u . وبالتالى توجد النهاية

$$\lim_{R\to\infty}\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = \iiint_T u\,\Delta v\,d\tau.$$

ونتيجة لذلك نتوصل إلى العلاقة

$$\iiint_T u\,\Delta v\,d\tau =$$
$$= -\iiint_T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \quad (25)$$

وبذلك أثبتنا قابلية تطبيق علاقة جرين الأولى ومن ثم الثانية للمناطق اللامحدودة على الدوال المنتظمة فى اللانهاية .

نبين الآن أن المسألة الحدية الخارجية الثانية (مسألة نيمان الخارجية) لها حل وحيد منتظم فى اللانهاية :

بوضع $v = u = u_1 - u_2$ فى العلاقة (25) والأخذ فى الاعتبار أن $\Delta u = 0$ ، $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$ نحصل على :

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,d\tau = 0.$$

ومن هنا ووفقًا لاتصال مشتقات الدالة u ينتج أن

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad u \equiv \text{const.}$$

وحيث إن $u = 0$ فى اللانهاية فإن

$$u \equiv 0 \text{ أى أن } u_1 \equiv u_2 \text{ ،}$$

وهو المطلوب إثباته .

ومن الطبيعى أن ينشأ هنا سؤال : هل يمكن إثبات وحدانية حل المسألة الحدية الأولى بهذه الطريقة أيضًا ؟

نفرض أن u_2 , u_1 حلان مختلفان للمسألة الحدية الأولى (الداخلية) . نطبق العلاقة (3) على الدالتين $u = u_1 - u_2$ و $v = u$ فى المنطقة T المحدودة بالسطح Σ :

$$\iiint_T u \, \Delta u \, d\tau = -\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, d\tau + \iint_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

ومن هنا وبأخذ الشروط

$$\Delta u = 0, \quad u|_\Sigma = 0$$

فى الاعتبار نحصل على :

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \, d\tau = 0$$

وبالتالى

$$u_x = u_y = u_z = 0, \quad u = \text{const.}$$

وعلى السطح Σ الدالة u تساوى الصفر ولذا يمكننا أن نؤكد أن

$$u \equiv 0 \text{ ,} \quad u_1 \equiv u_2 .$$

غير أن هذا الإثبات غير دقيق لأنه خلال عملية الإثبات افترضنا وجود مشتقات الدالة المجهولة على السطح Σ وهو ما لا تنص عليه صياغة المسألة . ويخلو إثبات الوحدانية المؤسس على مبدأ القيمة العظمى من هذا العيب .

بند ٣ ـ حل المسائل الحدية للمناطق البسيطة
بطريقة فصل المتغيرات

يمكن تعيين حل المسائل الحدية لمعادلات لابلاس بواسطة طريقة فصل المتغيرات فى حالة بعض المناطق البسيطة (دائرة ، مستطيل ، كرة ، اسطوانة وغيرها) . ومسائل القيم الذاتية الناتجة عند ذلك (مسائل شتورم ـ ليوفيل) تؤدى إلى فصول مختلفة من الدوال الخاصة . وفى هذا البند سندرس مسائل ديريشليت (الداخلية والخارجية) التى يستعان عند حلها بالدوال المثلثية فقط . وفيما بعد ، عند دراسة الدوال الخاصة ، سندرس مسائل ديريشليت للكرة والاسطوانة .

فقرة ١ : المسألة الحدية الأولى للدائرة. نحل المسألة الحدية الأولى للدائرة :

عين الدالة u التى تحقق المعادلة :

$$\Delta u = 0 \quad \text{داخل الدائرة} \tag{1}$$

والشرط الحدى

$$u = f \quad \text{على حدود الدائرة (على المحيط) ،} \tag{2}$$

حيث f دالة معطاة .

سنفرض أولاً أن الدالة f متصلة وقابلة للتفاضل وأن الحل $u(M)$ متصل فى المنطقة المغلقة . وفيما بعد سنترك شروط القابلية للتفاضل وحتى اتصال الدالة f (قارن مع فقرة ٤ ، بند ٢) . وبالإضافة إلى المسألة الحدية الداخلية سندرس أيضًا المسألة الحدية الخارجية (انظر بند ٢ ، فقرة ٧) .

ندرج مجموعة قطبية للإحداثيات (ρ, φ) نقطة أصلها فى مركز الدائرة . والمعادلة (1) فى الإحداثيات القطبية تكون على الصورة :

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{3}$$

(انظر العلاقة (34) بند ١) . سنحل المسألة بطريقة فصل المتغيرات أى سنبحث عن الحل الخاص للمعادلة (1) فى الصورة

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0.$$

بالتعويض بالصورة المقترحة للحل فى المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda,$$

حيث $\lambda=\text{const}$. ومن هنا نحصل على المعادلتين :

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \quad \Phi\not\equiv 0, \tag{4}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\lambda R=0, \quad R\not\equiv 0. \tag{5}$$

والمعادلة الأولى من هاتين المعادلتين تعطينا :

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi.$$

ونشير إلى أنه عند تغير الزاوية φ بمقدار 2π يجب أن تعود الدالة الأحادية القيمة $u(\rho,\varphi)$ إلى قيمتها الأصلية

$$u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$$

(شرط الدورية) . ومن هنا ينتج أن $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ ، أى أن $\Phi(\varphi)$ تعتبر دالة دورية فى الزاوية φ بفترة دورة 2π . وهذا يكون ممكنًا فقط إذا كان $\sqrt{\lambda}=n$ حيث n عدد صحيح و

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi.$$

والدالة $R(\rho)$ سنبحث عنها فى الصورة $R(\rho)=\rho^{\mu}$. بالتعويض فى المعادلة (5) واختصار ρ^{μ} نجد أن

$$n^2=\mu^2 \text{ أو } \mu=\pm n \quad (n>0)$$

وبالتالى

$$R(\rho)=C\rho^{n}+D\rho^{-n},$$

حيث C , D ثابتان .

ولحل المسألة الداخلية يجب أن نضع $R=C\rho^{n}$ $(\mu=n)$ وذلك لأنه إذا كان $D\neq 0$ فإن الدالة $u=R(\rho)\Phi(\varphi)$ تؤول إلى اللانهاية عند $\rho=0$ ولا تعتبر دالة توافقية داخل الدائرة . ولحل المسألة الخارجية يجب على العكس أن نأخذ

$R = D\rho^{-n}$ $(\mu = -n)$ ، لأن حل المسألة الخارجية يجب أن يكون محدودًا فى اللانهاية .

وهكذا فالحلول الخاصة لمسألتنا قد عينت* :

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad , \quad \rho \leqslant a,$$
$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad , \quad \rho \geqslant a.$$

ومجموعا هذه الحلول

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \qquad \text{للمسألة الداخلية}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \qquad \text{للمسألة الخارجية}$$

يكونان عند التقارب الجيد بدرجة كافية دالتين توافقيتين أيضًا .

ولتعيين المعاملات B_n , A_n نستعين بالشروط الحدية

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \tag{6}$$

وباعتبار أن f معطاة كدالة فى الزاوية φ نأخذ مفكوكها فى متسلسلة فورييه

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{7}$$

---

* تفقد صيغة مؤثر لا بلاس فى الإحداثيات القطبية (3) معناها عند $\rho = 0$. نثبت أن $\Delta u_n = 0$ أيضا عندما $\rho = 0$. ولإثبات ذلك لن نستعين الآن بمجموعة الإحداثيات القطبية ، فننتقل إلى الإحداثيات الكرتيزية . الحلول الخاصة

$$\rho^n \cos n\varphi \quad \text{و} \quad \rho^n \sin n\varphi \text{ ،}$$

بوصفها الجزأين الحقيق والتخيلى للدالة

$$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n,$$

تعتبر كثيرات حدود فى x و y . ومن الواضح أن كثيرة الحدود التى تحقق ،معادلة لا بلاس $\Delta u = 0$ عندما $\rho > 0$ تحقق هذه المعادلة وفقا لاتصال المشتقات الثانية عندما $\rho = 0$ أيضا .

حيث

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi\, d\psi \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi\, d\psi \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

وبمقارنة المتسلسلتين (7) , (6) نحصل على :

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \qquad \text{للمسألة الداخلية}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \qquad \text{للمسألة الخارجية}$$

وبذلك حصلنا على الحل الشكلى للمسألة الحدية الداخلية للدائرة فى صورة متسلسلة :

$$u(\rho,\ \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{8}$$

وعلى حل المسألة الخارجية فى الصورة :

$$u(\rho,\ \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \tag{9}$$

وللتأكد من أن الدوال الناتجة هى بالفعل الحلول المطلوبة يجب التأكد من قابلية تطبيق مبدأ التراكب ، ولهذا الغرض يجب إثبات تقارب المتسلسلات وإمكانية تفاضلها حداً حداً وكذلك إثبات اتصال هذه الدوال على حدود الدائرة . وكلتا المتسلسلتين يمكن التعبير عنهما بعلاقة واحدة :

$$u(\rho,\ \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

حيث

$$t = \begin{cases} \dfrac{\rho}{a} \leqslant 1 \ ,\ (\rho \leqslant a) & \text{للمسألة الداخلية} \\[2mm] \dfrac{a}{\rho} \leqslant 1 \ ,\ (\rho \geqslant a) & \text{للمسألة الخارجية} \end{cases}$$

و α_n, β_n معاملات فوريیه للدالة $f(\varphi)$.

نثبت أن المتسلسلتين (9) ,(8) يمكن تفاضلهما عندما $t < 1$ اى عدد من المرات . نفرض أن

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

نحسب المشتقة رقم k للدالة u_n بالنسبة إلى φ

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \beta_n \sin\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

ومن هنا نحصل على التقدير

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k}\right| \leqslant t^n n^k 2M,$$

حيث رمزنا بالحرف M إلى النهاية العظمى للقيمة المطلقة لمعاملات فوريیه α_n , β_n :

$$|\alpha_n| < M, \quad |\beta_n| < M. \tag{10}$$

وبتثبيت قيمة معينة $\rho_0 < a$ (للمسألة الداخلية) أو $\rho_1 = a^2/\rho_0 > a$ (للمسألة الخارجية) ، وعند ذلك يكون $t_0 = \rho_0/a < 1$ ، ندرس المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \qquad (t \leqslant t_0),$$

فنرى أنها تتقارب بانتظام عند $t \leqslant t_0 < 1$ لأى k . ولذا يمكن تفاضل المتسلسلتين (9) ,(8) بالنسبة إلى φ فى أية نقطة داخل (أو خارج) الدائرة أى عدد من المرات . وبالمثل يتم إثبات أنه يمكن أيضًا تفاضل المتسلسلتين (8) ، (9) بالنسبة إلى ρ داخل (خارج) الدائرة التى نصف قطرها $\rho_0 < a$ $(\rho_1 > a)$ أى عدد مطلوب من المرات .

ووفقًا للطابع الاختيارى للقيمة ρ_0 نستنتج أن المتسلسلتين (9) , (8) قابلتان للتفاضل حدًّا حدًّا فى كل نقطة داخلية (خارجية) من نقط الدائرة . ومن إمكانية

التفاضل حدًّا حدًّا تنتج قابلية تطبيق مبدأ التراكب . وبذلك أثبتنا أن الدالتين (9) , (8) تحققان المعادلة $\Delta u = 0$ *.

وفى هذا الإثبات استعنا فقط بخاصية الدالة $f(\varphi)$ التى تنحصر فى أن معاملات فورييه لها محدودة (العلاقة (10)). ويتحقق هذا لأية دالة محدودة (وحتى لأية دالة قابلة للتكامل مطلقًا) . وبذلك فالمتسلسلتين (9) , (8) المناظرتين لأية دالة محدودة تعرفان دوال تحقق المعادلة

$$\Delta u = 0 \quad , \quad t < 1.$$

وسنستعين بهذه الملاحظة فيما بعد عند تعميم النتائج التى نحصل عليها فى هذه الفقرة .

وننتقل الآن إلى إثبات اتصال الدالة فى المنطقة المغلقة $(t \leqslant 1)$ ، ومن الواضح أنه لا يمكن إجراء ذلك بدون معلومات أكثر تفصيلاً عن خواص الدالة $f(\varphi)$.

من فرض اتصال وقابلية تفاضل الدالة $f(\varphi)$ ينتج إمكانية تحليلها فى متسلسلة فورييه وكذلك تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \qquad (11)$$

ومن ناحية أخرى لدينا

$$|t^n \alpha_n \cos n\varphi| \leqslant |\alpha_n|, \qquad |t^n \beta_n \sin n\varphi| \leqslant |\beta_n|.$$

ولذا فالمتسلسلتين (9) , (8) تتقاربان بانتظام عندما $t \leqslant 1$ وبالتالى فإن الدالتين الممثلتين بهما متصلتان على حدود الدائرة . ومن العلاقة (11) نتضح أن الداله (9) الناتجة للمسألة الخارجية محدودة فى اللانهاية .

---

* وهذا المنطوق يتحقق أيضا عندما $\rho = 0$. بالفعل بالتعبير عن المشتقات بالإحداثيات الكرتيزية بدلالة المشتقات بالإحداثيات القطبية لا يصعب التأكد من أن الدالتين (9) , (8) عند $t \leqslant t_0$ يمكن تفاضلها بالنسبة إلى y , x أى عدد من المرات . ووفقا للهامش السابق ينتج من هذا أن

$\Delta u = 0$ عندما $\rho = 0$.

وبذلك أثبتنا أن المتسلسلتين (9) , (8) تحققان كل شروط المسائل محل البحث.

فقرة ٢ : تكامل بواسون. نحول الآن العلاقتين (9) , (8) إلى صورة أبسط. للتحديد ندرس المسألة الداخلية ثم نكتب النتيجة للمسألة الخارجية بالمثل.

بالتعويض بصيغ معاملات فورييه فى العلاقة (8) وتغيير ترتيب الجمع والتكامل سنحصل على :

$$u(\rho, \varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{n}(\cos n\psi\cos n\varphi+\sin n\psi\sin n\varphi)\right\}d\psi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{n}\cos n(\varphi-\psi)\right\}d\psi. \qquad (12)$$

نجرى التحويلات المتطابقة التالية :

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^{n}\cos n(\varphi-\psi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}t^{n}\left[e^{in(\varphi-\psi)}+e^{-in(\varphi-\psi)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(te^{i(\varphi-\psi)})^{n}+(te^{-i(\varphi-\psi)})^{n}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}}+\frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1-t^{2}}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^{2}} \qquad \left(t=\frac{\rho}{a}<1\right).$$

بالتعويض بهذه النتيجة فى المتساوية (12) نحصل على :

$$u(\rho, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,\frac{a^{2}-\rho^{2}}{\rho^{2}-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^{2}}\,d\psi. \qquad (13)$$

والعلاقة الناتجة التى تعطى حل المسألة الحدية الأولى داخل الدائرة تسمى بتكامل بواسون ، والصيغة المكاملة

$$K(\rho, \varphi, a, \psi)=\frac{a^{2}-\rho^{2}}{\rho^{2}-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^{2}}$$

تسمى بنواة بواسون. ونشير إلى أن $K(\rho, \varphi, a, \psi)>0$ عندما $\rho<a$ وذلك لأن $2a\rho<a^{2}+\rho^{2}$ إذا كان $\rho\neq a$.

وقد استنبط تكامل بواسون بفرض أن $\rho < a$ ، وعندما $\rho = a$ تفقد الصورة (13) معناها . إلا أن

$$\lim_{\substack{\rho \to a \\ \varphi \to \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0),$$

وذلك لأن المتسلسلة التى حصلنا منها على تكامل بواسون تعتبر دالة متصلة فى المنطقة المغلقة .

والدالة المعرفة بالعلاقة

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \dfrac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} \, d\psi \quad , & \rho < a, \\ f(\varphi) \quad , & \rho = a, \end{cases} \tag{13'}$$

تحقق المعادلة $\Delta u = 0$ عندما $\rho < a$ وتكون متصلة فى المنطقة المغلقة بما فى ذلك المحيط $\rho = a$.

ومن الواضح أن حل المسألة الحدية الخارجية يكون على الصورة :

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \dfrac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + a^2} \, d\psi \quad , & \rho > a, \\ f(\varphi) \quad , & \rho = a. \end{cases} \tag{14}$$

وفى البداية افترضنا أن الدالة $f(\varphi)$ متصلة وقابلة للتفاضل ، وبالاستعانة بذلك أثبتنا أن حل المسألة يمكن التعبير عنه بمتسلسلة لانهائية . وبعد ذلك توصلنا بواسطة التحويلات المتطابقة من المتسلسلة إلى تكامل بواسون .

نثبت الآن أن تكامل بواسون يعطى حل المسألة الحدية الأولى أيضًا عندما تكون الدالة $f(\varphi)$ متصلة فقط .

إن تكامل بواسون يعبر عن حل معادلة لابلاس عندما $\rho < a$ ($t < 1$) لأية دالة اختيارية محدودة $f(\varphi)$. بالفعل فعندما $\rho < a$ ($t < 1$) يكون تكامل بواسون متطابقًا مع المتسلسلة (8) ووفقًا للملاحظة فى صفحة ٣٦٩ يحقق المعادلة $\Delta u = 0$ لأية دالة اختيارية محدودة $f(\varphi)$.

وبذلك يتبقى علينا أن نثبت أن الدالة u فى حالتنا تؤول باتصال إلى القيم الحدية . نختار متتابعة ما من الدوال المتصلة القابلة للتفاضل

$$f_1(\varphi),\ f_2(\varphi),\ \ldots,\ f_k(\varphi),\ \ldots,$$

تتقارب بانتظام إلى الدالة $f(\varphi)$* :

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

ومتابعة الدوال الحدية ستناظرها متتابعة من الدوال التوافقية $u_k(\rho,\varphi)$ المعرفة بالعلاقة (13) أو (8) . والتقارب المنتظم للمتتابعة $\{f_k(\varphi)\}$ إنما يعنى أنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $k_0(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad l > 0,\ k > k_0(\varepsilon)،$$

وللدوال $u_k(r,\varphi)$ التى تمثل حلول المسألة الحدية الأولى سنحصل وفقًا لمبدأ القيمة العظمى على :

$$|u_k(\rho,\varphi) - u_{k+l}(\rho,\varphi)| < \varepsilon$$

عندما $\rho \leqslant \rho_0$ إذا كان $k > k_0(\varepsilon)$ ، $l > 0$. وبذلك تتقارب المتتابعة $\{u_k\}$ بانتظام إلى دالة ما $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$. والدالة النهائية $u(\rho,\varphi)$ متصلة فى المنطقة المغلقة نظرًا لأن كل الدوال u_k الممثلة بالتكاملات

$$u_k(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\psi) + a^2} f_k(\psi)\,d\psi,$$

هى دوال متصلة فى المنطقة المغلقة. ومن الواضح أن

$$u(\rho,\varphi) = \lim_{k\to\infty} u_k(\rho,\varphi) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{a^2-\rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\psi) + \rho^2} f(\psi)\,d\psi, & \rho < a, \\ f(\varphi), & \rho = a, \end{cases}$$

---

* لن نتوقف هنا عند كيفية تحقيق ذلك . فثل هذه المتتابعة يمكن اختيارها بطرق عديدة .

.لك لأن المتتابعة $\{f_k\}$ تتقارب بانتظام إلى f ولذا يكون الانتقال إلى النهاية
ت علامة التكامل قانونيًّا .

وبذلك فالدالة

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}f(\psi)\,d\psi$$

لأية دالة اختيارية متصلة $f(\varphi)$ تكون حلاً لمعادلة لابلاس وتؤول باتصال إلى القيم المعطاة على حدود الدائرة .

فقرة ٣ : حالة القيم الحدية المنفصلة . نثبت أن العلاقتين (13′) ، (14) تعطيان حل المسألة الحدية لأية دالة اختيارية متقطعة الاتصال $f(\varphi)$ أى أن هذا الحل محدود فى كل المنطقة ويؤول باتصال إلى القيم الحدية عند نقط اتصال الدالة $f(\varphi)$ ويكون بذلك هو الحل الوحيد الذى يتمتع بهذه الخاصية (قارن مع بند ٢ ، فقرة ٤) . نفرض أن φ_0 هى نقطة ما من نقط اتصال الدالة $f(\varphi)$. ويجب إثبات أنه مهما كان $\varepsilon>0$ يوجد $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|u(\rho,\varphi)-f(\varphi_0)|<\varepsilon,$$

إذا كان

$$|\rho-a|<\delta(\varepsilon) \quad \text{و} \quad |\varphi-\varphi_0|<\delta(\varepsilon) .$$

ووفقًا لاتصال الدالة $f(\varphi)$ يوجد $\delta_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|f(\varphi)-f(\varphi_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{إذا كان} \quad |\varphi-\varphi_0|<\delta_0(\varepsilon) .$$

ندرس دالتين مساعدتين متصلتين وقابلتين للتفاضل $\underline{f(\varphi)}$ ، $\overline{f(\varphi)}$ تحققان الشروط التالية :

$$\overline{f(\varphi)}=f(\varphi_0)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{عندما} \quad |\varphi-\varphi_0|<\delta_0(\varepsilon) ،$$

$$\overline{f(\varphi)}\geqslant f(\varphi) \quad \text{عندما} \quad |\varphi-\varphi_0|>\delta_0(\varepsilon)$$

و

$$\underline{f(\varphi)}=f(\varphi_0)-\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{عندما} \quad |\varphi-\varphi_0|<\delta_0(\varepsilon) ،$$

$$\underline{f(\varphi)}\leqslant f(\varphi) \quad \text{عندما} \quad |\varphi-\varphi_0|>\delta_0(\varepsilon) ،$$

وفيما عدا ذلك تكون الدالتان هاتان اختياريتين . وإذا عينا بواسطة العلاقة (13) للدالتين $\underline{f}$, $\bar{f}$ الدالتين $\underline{u}(\rho, \varphi)$ و$\bar{u}(\rho, \varphi)$ فإنهما ستكونان دالتين توافقيتين تؤولان باتصال إلى $\underline{f}(\varphi)$, $\bar{f}(\varphi)$.

ونظراً لأن نواة بواسون موجبة ، نحصل على

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi),$$

وذلك لأن

$$\underline{f}(\varphi) \leqslant f(\varphi) \leqslant \bar{f}(\varphi).$$

ومن اتصال الدالتين $\underline{u}(\rho, \varphi)$, $\bar{u}(\rho, \varphi)$ على الحدود عند $\varphi = \varphi_0$ ينتج وجود $\delta_1(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|\bar{u}(\rho, \varphi) - \bar{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{عندما} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\rho - a| < \delta_1(\varepsilon),$$

و

$$|\underline{u}(\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{عندما} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\rho - a| < \delta_1(\varepsilon).$$

ومن هذه المتباينات نجد أن :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(\rho, \varphi) \leqslant \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon = \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \end{array} \right. \quad \text{عندما} \quad \begin{array}{l} |\rho - a| < \delta(\varepsilon) \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) \end{array}.$$

حيث $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

وبمقارنة المتباينات الناتجة نجد أن

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi) \leqslant f(\varphi_0) + \varepsilon$$

أو

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon \quad \text{عندما} \quad \begin{array}{l} |a - \rho| < \delta(\varepsilon) ، \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon) ؛ \end{array}$$

وهو ما يثبت اتصال $u(\rho, \varphi)$ في النقطة (a, φ_0) .

وتنتج محدودية $u(\rho, \varphi)$ من أنه وفقًا لأن نواة بواسون موجبة يكون

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi)} d\psi = M,$$

إذا كانت $|f(\varphi)| < M$. أما قيمة التكامل

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)\, d\psi}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} \equiv 1,$$

وذلك لأنه وفقًا لما سبق أن أثبتناه يكون الطرف الأيسر عبارة عن دالة توافقية تؤول باتصال إلى قيمها الحدية $f \equiv 1$ ، ومثل هذه الدالة تساوى الواحد الصحيح بالتطابق . وبالمثل $u(\rho, \varphi) > M_1$ إذا كانت $f > M_1$ مما يثبت محدودية القيمة المطلقة للدالة $u(\rho, \varphi)$.

بند ٤ ـ دالة المصدر

تعطى طريقة دالة المصدر جهازًا مناسبًا للتعبير التحليلى لحل المسائل الحدية .

وفى هذا البند سنورد تعريف وأهم خواص دالة المصدر لمعادلة لابلاس وكذلك سنكوّن دوال المصدر لعدة مناطق بسيطة (الدائرة ، الكرة ، نصف الفراغ) . وهذا التكوين سيتم بطريقة التمثيلات الكهروستاتيكية .

فقرة ١ : دالة المصدر للمعادلة $\Delta u = 0$ وخواصها الأساسية . لأية دالة u متصلة هى ومشتقاتها الأولى فى منطقة مغلقة T محدودة بسطح أملس بدرجة كافية Σ ولها مشتقات ثانية داخل T يتحقق كما سبق أن أوضحنا فى بند ٢ ، فقرة ١ التمثيل التكاملى :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] d\sigma_P -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M. \quad (1)$$

وإذا كانت الدالة $u(M)$ توافقية فإن التكامل الحجمى (الثلاثى) يكون مساويًا للصفر . أما إذا كانت الدالة $u(M)$ تحقق معادلة بواسون فإن هذا التكامل الحجمى يكون دالة معلومة .

نفرض أن $v(M)$ دالة توافقية ما متصلة فى $T+\Sigma$ هى ومشتقاتها الأولى وليس لها نقط منفردة فى أى مكان . وعلاقة جرين الثانية

$$\iiint_T (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

تعطى :

$$0 = \iint_\Sigma \left(v\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma - \iiint_T v\,\Delta u\,d\tau. \qquad (2)$$

وبجمع (2) , (1) نحصل على :

$$u(M_0) = \iint_\Sigma \left[G\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial G}{\partial n}\right] d\sigma - \iiint_T \Delta u \cdot G\,d\tau, \qquad (3)$$

حيث

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \qquad (3')$$

دالة فى النقطتين $M(\xi, \eta, \zeta)$, $M_0(x, y, z)$. والنقطة M_0 مثبتة ولذا تؤدى x, y, z دور البارامترات .

وتحتوى العلاقة (3) على $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma$, $u|_\Sigma$ ، بينما تعطى فقط $u|_\Sigma$ عند حل المسألة الحدية الأولى وعند حل المسألة الحدية الثانية تعطى فقط قيمة $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma$.

ونختار الدالة v بحيث يكون $G|_\Sigma = 0$ للمسألة الحدية الأولى ($\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$ للمسألة الحدية الثانية) . نعين الدالة $G(M, P)$ بواسطة الشروط :

١ ـ $G(M, P)$ بوصفها دالة فى النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ عند ثبات $M(x, y, z)$ تحقق معادلة لابلاس

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M$$

فى كل النقط P فى المنطقة T إلا فى النقطة $P = M$.

٢ ـ $G(M, P)$ عند انطباق متغيريها $(M = P)$ تؤول إلى مالانهاية ويمكن

التعبير عنها فى الصورة $(3')$ حيث $v = v(M, P)$ دالة توافقية فى كل مكان فى T .

٣ ـ $G(M, P)$ تؤول إلى الصفر على الحدود :

$$G(M, P) = 0 \quad \text{إذا كانت} \quad P \in \Sigma .$$

ويمكن تحقيق هذا الشرط إذا طلبنا أن تكون

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

والدالة G المعرفة بهذه الطريقة تسمى دالة المصدر النقطى للمسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$. وتكفل دالة المصدر إعطاء تعبير صريح لحل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$. بالفعل تعطى العلاقة (3) :

$$u(M_0) = -\iint_{\Sigma} u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = -\iint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (f = u|_{\Sigma}). \qquad (4)$$

وينبغى الاخذ فى الاعتبار أن العلاقة (4) قد نتجت بواسطة علاقة جرين التى يفترض فيها تحقق شروط معينة تتعلق بالدالتين G , u والسطح Σ . وفى العلاقة (4) تدخل الصيغة $\frac{\partial G}{\partial n}$ التى لا ينتج وجودها على السطح Σ مباشرة من تعريف الدالة G .

وعند الحصول على العلاقة (4) انطلقنا من وجود دالة توافقية u تأخذ على السطح Σ قيمة f . وبذلك فحتى لتلك المناطق التى توجد لها دالة مصدر تحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق تعطى العلاقة (4) تعبيرًا صريحًا فقط لحلول المسألة الحدية الأولى u تلك التى تحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق (بإثبات وحدانية هذا الفصل من حلول المسألة الحدية الأولى) .

وقد أوضح البحث التفصيلى للعلاقة (4) الذى أجراه عالم الرياضيات الروسى أ . ليابونوف أنه لفصل واسع من السطوح التى تسمى سطوح ليابونوف (انظر بند ٥) تعبر هذه العلاقة عن حل المسألة الحدية الأولى بشروط عامة للغاية .

نتوقف مرة أخرى عند تعريف الدالة G . تعرف الدالة G بواسطة الدالة v التى تعتبر حلاً للمسألة الحدية الأولى للمعادلة

$$\Delta v = 0$$

بالقيم الحدية

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

وقد ينشأ انطباع أن لدينا حلقة مفرغة . فلتعيين الدالة u حل المسألة الحدية الأولى يلزم تعيين الدالة v حل نفس هذه المسألة . وفى واقع الأمر لا توجد حلقة مفرغة وذلك لأن معرفة دالة المصدر تكفل حل المسألة الحدية الأولى بقيم حدية اختيارية $(u|_{\Sigma} = f)$ فى حين أنه لتعيين الدالة G نفسها يكفى حل المسألة الحدية بقيم حدية خاصة معينة $(v|_{\Sigma} = -1/4\pi R)$ وهو كما سنرى على عدة أمثلة أسهل بدرجة ملحوظة .

وعند التفسير الكهروستاتيكى تعبر دالة المصدر

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} + v$$

عن الجهد فى النقطة M للشحنة النقطية الموضوعة فى النقطة M_0 داخل سطح موصل Σ متصل بالأرض . والحد الأول $1/4\pi R$ من الواضح أنه جهد الشحنة النقطية فى الفراغ الحر ، أما الحد الثانى v فيعنى جهد مجال الشحنات المستحثة (induced) على السطح الموصل Σ . وبذلك فإن تكوين دالة المصدر يؤول إلى تعيين المجال المستحث*

نتوقف عند بعض خواص دالة المصدر . وعندئذ سنفترض أن المناطق محل الدراسة هى بحيث توجد لها دوال مصدر ذات مشتقات عمودية على السطح Σ وتحقق شروط قابلية علاقة جرين للتطبيق :

---

* عند التفسير الحرارى تعرف درجة الحرارة المستقرة (التى لا تعتمد على الزمن) للمصدر الحرارى النقطى التى شدته q بالعلاقة

$$q/4\pi kr,$$

حيث k معامل التوصيل الحرارى . وبذلك فالدالة $G(MM_0)$ هى عبارة عن درجة الحرارة فى النقطة M إذا كانت درجة حرارة سطح الجسم مساوية للصفر ووضع عند النقطة M_0 مصدر حرارى شدته $q = k$.

وإذا اختير مقياس رسم الأطوال بحيث يكون $k = 1$ فإن الدالة G تناظر مصدرا شدته تساوى الواحد الصحيح .

١ ـ دالة المصدر موجبة فى كل مكان داخل T . بالفعل ، الدالة G تؤول إلى الصفر على حدود المنطقة Σ وتكون موجبة على سطح كرة صغيرة صغرًا كافيًا مرسومة حول القطب . ومن هنا ينتج وفقًا لمبدأ القيمة العظمى أن G موجبة فى كل المنطقة . ونشير أيضًا إلى أن

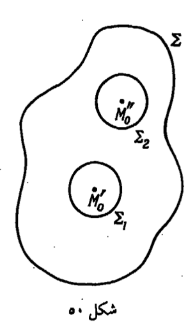
$$\left.\frac{dG}{dn}\right|_{\Sigma} \leqslant 0,$$

هو ما ينتج مباشرة من أن G موجبة ومن الشرط $G|_{\Sigma}=0$.

٢ ـ دالة المصدر متماثلة بالنسبة إلى متغيريها $M(\xi, \eta, \zeta)$ ، $M_0(x, y, z)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

رض أن M_0'' ، M_0' نقطتان مثبتتان من نقط طقة T . نكوّن السطحين الكرويين Σ_1 ، ونصف قطر كل منهما ε ومركزاهما النقطتين M_0'' ، M_0' (شكل ٥٠) . س أن



شكل ٥٠

$$u(M) = G(M, M_0'),$$

$$v(M) = G(M, M_0'')$$

ن علاقة جرين

$$\iiint_{T_\varepsilon} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\tau = \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

طقة T_ε المحدودة بالسطوح Σ_2 ، Σ_1 ، Σ سنحصل على :

$$\iint_{\Sigma_1}\left[G(M, M_0')\frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'')\frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M +$$

$$+ \iint_{\Sigma_2}\left[G(M, M_0')\frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'')\frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M$$

أن الطرف الأيسر للمعادلة (5) يساوى الصفر لأن $\Delta G = 0$ والتكامل

المأخوذ على السطح Σ يساوى الصفر وفقًا للشروط الحدية . وبالانتقال إلى النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ والاستعانة بخواص دالة المصدر نحصل على* :

$$G(M_0', M_0'') = G(M_0'', M_0')$$

أو

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

والتماثل المثبت للدالة المصدر يعتبر هو الصيغة الرياضية لمبدأ التبادل فى الفيزياء (reciprocity law) : المصدر الموضوع فى النقطة M_0 يحدث عند النقطة M نفس التأثير الذى يحدثه عند النقطة M_0 المصدر الموضوع فى النقطة M . ويحمل مبدأ التبادل طابعًا عامًّا للغاية ويسرى على كثير من المجالات الفيزيائية (الكهرومغناطيسى ، مجال المرونة** .. الخ) .

ونشير كحالة خاصة إلى أنه من خواص التماثل ينتج أن الدالة $u(M_0) = G(M, M_0)$ بوصفها دالة فى المتغيرات x, y, z للنقطة M_0 عند ثبات M تتمتع بنفس خاصية الدالة $v(M) = G(M, M_0)$ فى المتغيرات ξ, η, ζ للنقطة M عند ثبات M_0 ، أى أن $\Delta_M G = 0$ عندما $M \neq M_0$ و $G = 0$ عندما $M_0 \in \Sigma$

ودالة المصدر $G(M, M_0)$ لحالة الفراغ الثنائى الأبعاد (المستوى) ستتحدد بالشروط :

١ ـ $\Delta G = 0$ فى كل مكان فى المنطقة محل البحث S إلا فى النقطة $M = M_0$.

٢ ـ فى النقطة $M = M_0$ يكون للدالة G نقطة منفردة على الصورة

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

* هذه النظرية اثبتها ليابونوف لفصل من السطوح تسمى بسطوح ليابونوف .

** فى علم المرونة يسمى مبدأ التبادل بنظرية بيتى للتبادل وتنص على أن الشغل الذى تبذله مجموعة قوى فى إزاحة حادثة من تأثير مجموعة قوى أخرى يساوى الشغل الذى تبذله مجموعة القوى الثانية فى الإزاحة الحادثة بتأثير مجموعة القوى الأولى (ملاحظة المترجم) .

٣ ـ $G|_C = 0$ حيث C حدود المنطقة S (محيطها) . وفى هذه الحالة تكون دالة المصدر على الصورة :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

حيث v دالة متصلة وتوافقية فى كل مكان وتحقق على الحدود الشرط

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} .$$

وحل المسألة الحدية الأولى للمعادلة $\Delta u = 0$ يعطى عندئذ بالعلاقة :

$$u(M_0) = -\int\limits_C f \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (f = u|_C).$$

فقرة ٢ : طريقة التمثيلات الكهروستاتيكية ودالة المصدر للكرة . تعتبر طريقة التمثيلات الكهروستاتيكية أكثر الطرق شيوعًا لتكوين دالة المصدر . وتنحصر فكرة هذه الطريقة فى أنه عند تكوين دالة المصدر

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$$

يكون المجال المستحث v هو عبارة عن مجال الشحنات الواقعة خارج السطح Σ والمختارة بحيث يتحقق الشرط

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R} .$$

وهذه الشحنات تسمى بالتمثيلات الكهروستاتيكية لوحدة الشحنة الموضوعة فى النقطة M_0 والتى تكوّن عند عدم وجود السطح Σ جهدًا مقداره $1/4\pi R$. وفى كثير من الحالات لا يشكل اختيار مثل هذه الشحنات أية صعوبة . وسنورد فيما بعد أمثلة على تكوين دالة المصدر بطريقة التمثيلات الكهروستاتيكية .

ومن صيغ دوال المصدر الناتجة فى كل هذه الأمثلة يتضح بشكل مباشر اتصال المشتقات الأولى للدوال G على السطح Σ .

وبمثابة المثال الأول ندرس دالة المصدر للكرة .

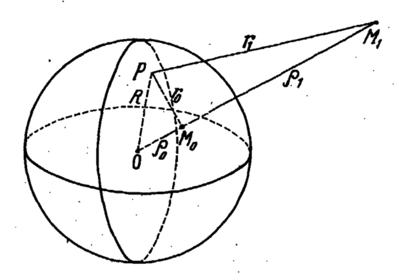
نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها R مركزها فى النقطة O والمطلوب تعيين دالة المصدر لها .

نضع فى النقطة M_0 وحدة الشحنة ونأخذ على نصف القطر المار بالنقطة M_0 جزءاً مستقيماً OM_1 بحيث يكون

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{6}$$

حيث $\rho_1 = OM_1$, $\rho_0 = OM_0$ (شكل ٥١).

والتحويل (6) الذى يضع النقطة M_0 فى تناظر مع نقطة معينة M_1 يعتبر تحويلاً لمقلوبات متجهات الموضع والنقطة M_1 نفسها تسمى بالنقطة المترافقة مع النقطة M_0 . وهذا التحويل يعتبر تحويلاً تبادليًّا ويمكن اعتبار النقطة M_0 كنقطة مترافقة مع النقطة M_1 .



شكل ٥١

نثبت أنه لجميع النقط P الواقعة على سطح الكرة يكون بعدا P عن M_0 وعن M_1 متناسبين. ولهذا الغرض ندرس المثلثين OPM_0 , OPM_1 (انظر شكل ٥١). وهما مثلثان متشابهان لأن الزاوية عند O مشتركة والأضلاع المجاورة لهذه الزاوية متناسبة :

$$\frac{OM_0}{R} = \frac{R}{OM_1} \quad \text{أو} \quad \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}$$

ومن تشابه المثلثين ينتج أن .

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}, \tag{7}$$

حيث $r_0=|\overrightarrow{M_0P}|, r_1=|\overrightarrow{M_1P}|$. ومن التناسب (7) نحصل على

$$r_0=\frac{\rho_0}{R}r_1$$

لجميع نقط السطح الكروى . ولذا فإن الدالة التوافقية $v=-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ تأخذ على السطح الكروى نفس القيمة التى تأخذها الدالة $1/r_0$ ـ وهى تعبر كما هو واضح عن جهد الشحنة التى مقدارها $-R/\rho_0$ والموضوعة فى النقطة M_1 .

وبذلك فالدالة

$$G(P, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right) \tag{8}$$

تعتبر هى دالة المصدر المطلوب تعيينها للكرة لأنها دالة توافقية لها عند النقطة M_0 انفراد على الصورة $1/4\pi r_0$ وتؤول إلى الصفر على سطح الكرة .

وحل المسألة الحدية الأولى يعطى بالعلاقة (4) .

نحسب المشتقة

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)-\frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right], \tag{9}$$

حيث n العمودى الخارجى ، $r_1=|\overrightarrow{M_1M}|$ (M بوجه عام لا تقع على السطح الكروى) .

ومشتقتا $1/r_0$, $1/r_1$ باتجاه العمودى n تساويان

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)&=\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial n}=-\frac{1}{r_0^2}\cos(\widehat{r_0, n}),\\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)&=\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n}=-\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{r_1, n}),\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

لأن

$$\frac{\partial r_0}{\partial n}=\cos(\widehat{r_0, n}),\quad \frac{\partial r_1}{\partial n}=\cos(\widehat{r_1, n}). \tag{11}$$

ولا يصعب تعيين مقدارى $\cos(\widehat{r_1, n})$, $\cos(\widehat{r_0, n})$:

$$\cos(\widehat{r_0, n})=\frac{R^2+r_0^2-\rho_0^2}{2Rr_0}, \tag{11'}$$

$$\cos(\widehat{r_1, n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}. \qquad (11'')$$

وبالاستعانة بالتناسب (7) نحصل على :

$$\cos(\widehat{r_1, n})\big|_\Sigma = \frac{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} r_0^2 - \frac{R^4}{\rho_0^2}}{2R\frac{R}{\rho_0} r_0} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0},$$

ذلك لأن $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$ وفقًا لتعريف النقطة M_1 و $r_1 = \frac{R}{\rho_0} r_0$ على السطح الكروى Σ بالاستعانة بالعلاقات (10) وكذلك بالصيغ (11″), (11′), (9), نجد أن :

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 r_0^2}\frac{R}{\rho_0}\frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}\right] = \\ = -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}.$$

وبذلك فالدالة $u(M_0)$ وفقًا للعلاقة (4) تكون مساوية :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_\Sigma f(P)\,\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3}\,d\sigma_P. \qquad (12)$$

ندرج مجموعة إحداثيات كروية نقطة أصلها فى مركز الكرة. نفرض أن (R, θ, φ) هى إحداثيات النقطة P ، $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ إحداثيات النقطة M_0 ، γ هى الزاوية بين متجهى الموضع $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OM_0}$. عندئذ يمكن كتابة العلاقة (12) فى الصورة :

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \quad (12')$$

حيث

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0). \qquad (13)$$

وهذه العلاقة تسمى بتكامل بواسون للكرة* .

وبنفس الطريقة يمكن تكوين دالة المصدر للمنطقة الخارجية بالنسبة إلى الكرة :

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1}\frac{1}{r_0}\right), \tag{14}$$

حيث $r_1 = MM_1$ البعد عن نقطة مثبتة M_1 تقع خارج الكرة ، $r_0 = MM_0$ البعد عن النقطة M_0 المترافقة مع النقطة M_1 ، ρ_1 بعد M_1 عن نقطة الأصل ، R نصف قطر الكرة .

وبأخذ الاختلاف فى اتجاهى العمودين للمسألتين الداخلية والخارجية نحصل على :

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_1^2 - R^2}{\left[R^2 - 2\rho_1 R\cos\gamma + \rho_1^2\right]^{3/2}} f(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

حيث يعطى $\cos\gamma$ بالعلاقة (13) (يجب تغيير الدليل 0 بالدليل 1) .

فقرة ٣ : دالة المصدر للدائرة . يمكن الحصول على دالة المصدر للدائرة بنفس الطريقة كدالة المصدر للكرة . وفى هذه الحالة يجب البحث عن الدالة فى الصورة :

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v. \tag{15}$$

وبتكرار التحليلات التى أجريناها فى الفقرة السابقة ابتداء من العلاقة (6) حتى الحصول على العلاقة (8) نعين الدالة G فى الصورة :

$$G(P, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right], \tag{16}$$

حيث $\rho_0 = OM_0$ ، $r_0 = M_0P$ ، $r_1 = M_1P$ ، $R = OP$ نصف قطر الدائرة

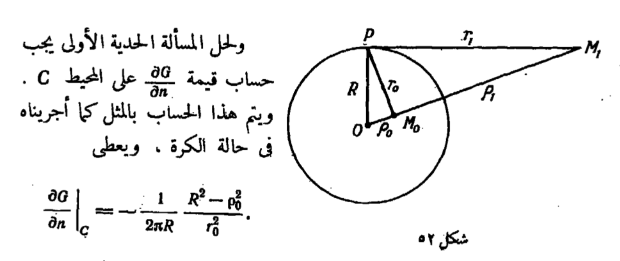
* بالفعل . جيوب التمام الاتجاهية للمتجهين $\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{OP}$ تساوى على الترتيب

$(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$, $(\sin\theta_0\cos\varphi_0,\ \sin\theta_0\sin\varphi_0,\ \cos\theta_0)$

ومن هنا

$$\cos\gamma = \cos\theta\cdot\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0(\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0) = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

(شكل ٥٢) . وليس من الصعب التحقق من أن الدالة التوافقية المعرفة بهذه الطريقة تؤول إلى الصفر على الحدود: $G|_C = 0$.



شكل ٥٢

ولحل المسألة الحدية الأولى يجب حساب قيمة $\frac{\partial G}{\partial n}$ على المحيط C . ويتم هذا الحساب بالمثل كما أجريناه فى حالة الكرة ، ويعطى

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_C = -\frac{1}{2\pi R}\,\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}.$$

نفرض أن (ρ, θ) هما الإحداثيان القطبيان للنقطة P الواقعة على المحيط ، (ρ_0, θ_0) إحداثيا النقطة M_0 . عندئذ فإن

$$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0).$$

بالتعويض فى العلاقة

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(P)\,\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}\,\frac{ds}{R}$$

بصيغة r_0 السابقة والأخذ فى الاعتبار أن

$$u(P)|_C = f(\theta) \quad , \quad ds = R\,d\theta$$

نصل إلى صيغة الدالة $u(M_0)$ التالية :

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}\, f(\theta)\, d\theta, \qquad (17)$$

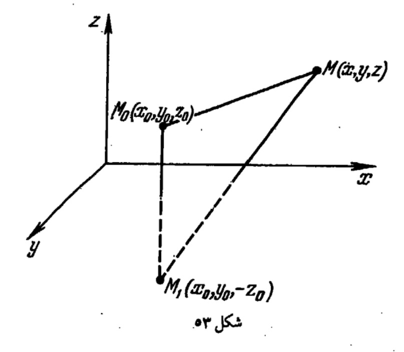
التى تسمى تكامل بواسون للدائرة (انظر صفحة ٣٧٠ ، العلاقة (13)) . وهذه العلاقة تعطى بدقة حتى الإشارة حل المسألة الخارجية أيضًا .

فقرة ٤ : دالة المصدر لنصف الفراغ . يسرى مفهوم دالة المصدر والعلاقة (4) للفراغ اللانهائى أيضًا إذا درست الدوال المنتظمة (regular) فى اللانهاية (انظر بند ٢ ، فقرة ٦) . نعين دالة المصدر لنصف الفراغ $z > 0$. نضع فى النقطة

وحدة شحنة تكوّن فى الفراغ اللانهائى مجالاً جهده يعرف بالدالة $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0M}}$ ، حيث $R_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

ولا يصعب ملاحظة أن «المجال المستحث» v يعتبر مجالاً لوحدة الشحنة السالبة



شكل ٥٣

الموضوعة فى النقطة $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ التى تعتبر انعكاسًا مرآويًا للنقطة M_0 فى المستوى $z=0$ (شكل ٥٣) . والدالة G التى تساوى

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi R_0}-\frac{1}{4\pi R_1},$$

حيث

$$R_0=|\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$
$$R_1=|\overrightarrow{M_1M}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

تؤول إلى الصفر عند $z=0$ ولها الانفراد المطلوب عند M_0 .

نحسب $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$. من الواضح أن

$$\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{R_0^3}+\frac{z+z_0}{R_1^3}\right].$$

بوضع $z=0$ نحصل على

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

وحل المسألة الحدية الأولى يعطى بالعلاقة

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma_0}\frac{z_0}{R_{M_0P}^3}f(P)\,d\sigma_P,$$

حيث Σ_0 هو المستوى $z=0$ و $f(P)=u|_{z=0}$ أو

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}f(x,y)\,dx\,dy. \quad (18)$$

بند ٥ ـ نظرية الجهد

الدالة $\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$ التى تعبر عن جهد مجال وحدة الكتل (الشحنة) الموضوعة فى النقطة $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ تعتبر حلاً لمعادلة لابلاس يعتمد على البارامترات ξ,η,ζ . وتكاملات هذه الدالة بالبارامترات تسمى بالجهود ولها أهمية جوهرية فى التطبيقات المباشرة للفيزياء وكذلك من وجهة نظر تطور طرق حل المسائل الحدية .

فقرة ١ : الجهد الحجمى . نفرض أن كتلة m_0 موضوعة فى النقطة $M_0(\xi,\eta,\zeta)$. وحسب قانون الجذب العام تؤثر على الكتلة m الموضوعة فى النقطة $M(x,y,z)$ قوة الجذب

$$F=-\gamma\frac{mm_0}{R^2}r, \quad (1)$$

حيث $r=R/R$ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{M_0M}$ $(R=\overrightarrow{M_0M})$ ، و γ ثابت الجاذبية . وباختيار مجموعة وحدات القياس بحيث يكون $\gamma=1$ وفرض أن $m=1$ نحصل على :

$$F=-\frac{m_0}{R^2}r.$$

ومساقط هذه القوة على المحاور الإحداثية تساوى

$$\left.\begin{aligned} X = F\cos\alpha = -\frac{m_0}{R^3}(x-\xi), \\ Y = F\cos\beta = -\frac{m_0}{R^3}(y-\eta), \\ Z = F\cos\gamma = -\frac{m_0}{R^3}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

حيث α, β, γ الزوايا التى يكونها المتجه F مع المحاور الإحداثية .

ندرج فى دراستنا الدالة u التى تسمى بجهد مجال القوى* والمعرفة بالمتساوية

$$F = \operatorname{grad} u$$

أو

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

وفى حالتنا

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

وجهد المجال لعدد n من النقط المادية سيعبر عنه وفقًا لتراكب مجالات القوى بالعلاقة :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{R_i}.$$

ننتقل إلى حالة التوزيع المتصل للكتل . نفرض أن لدينا جسمًا T كثافته $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. نعين جهد هذا الجسم فى النقطة $M(x, y, z)$. ولهذا الغرض نقسم الجسم T إلى أجزاء صغيرة صغرًا كافيًا $\Delta\tau$. ونفرض فرضًا طبيعيًا يكمن فى أن تأثير العنصر $\Delta\tau$ مكافئ لتأثير كتلته المركزة فى نقطة ما «متوسطة»** فى الحجم

* يجب عدم الخلط بين الجهد وطاقة وضع مجال القوى . فمصطلح الجهد يستخدم هنا بنفس معنى دالة القوى فى الميكانيكا .

** وبصورة أكثر دقة يفترض عندئذ أن تأثير حجم ما T كتلته m على نقطة واقعة خارج الحجم المحدب $\overline{T}$ الذى يحتوى هذا الجسم ، يمكن استبداله بتأثير مركز فعال ما له نفس الكتلة m ويقع داخل $\overline{T}$.

$\Delta\tau$ ، وعندئذ لمركبة القوة المؤثرة على النقطة M نحصل على الصيغة التالية :

$$\Delta X = -\frac{\rho\,\Delta\tau}{R^3}(x-\xi) \quad \text{حيث} \quad R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

ويعطى التكامل المأخوذ على كل الحجم T مركبة القوة الكاملة لجذب النقطة M بالجسم T

$$X = -\iiint_T \rho \frac{x-\xi}{R^3}\, d\tau. \tag{3}$$

والجهد فى النقطة M سيتحدد بالعلاقة

$$u(M) = \iiint_T \rho \frac{1}{R}\, d\tau. \tag{4}$$

وإذا كانت النقطة M تقع خارج الجسم فإن ذلك يمكن التحقق منه بالتفاضل مباشرة تحت علامة التكامل*. وبالمثل تحسب أيضا المشتقات من الرتب العليا. ومن الواضح أن الجهد $u(M)$ خارج الجسم T يحقق معادلة لابلاس (انظر تفصيل ذلك صفحة ٤٠٢). وفى المستقبل سنستعين بالخواص المذكورة أعلاه للجهود، دون أن نحاول تكوين النظرية بالشروط الأكثر عمومية، كما سنصوغ عدة نظريات بشرط أن يكون ρ دالة محدودة (يفترض أنها قابلة للتكامل).

إذا كانت النقطة M تقع داخل المنطقة T فلا يمكن التأكيد بأن $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ بدون بحث إضافى سنقوم به فيما سيلى.

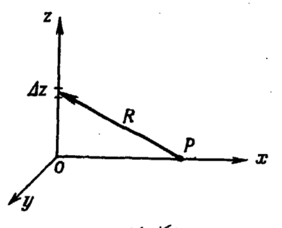
فقرة ٢ : المسألة المستوية. الجهد اللوغاريتمى. ندرس توزيع الكتل فى الفراغ المعتمد فقط على إحداثيين (x, y). فى أى مستوى $z = \text{const}$ كما هو

* لإمكانية تفاضل التكامل المحدود على الصورة

$$f(M) = \int_T F(M, P)\, \varphi(P)\, d\tau_P$$

بالنسبة إلى البارامتر تحت علامة التكامل يكفى اتصال مشتقة الدالة $F(M, P)$ بالبارامتر وقابلية التكامل مطلقا للدالة $\varphi(P)$. وعادة تصاغ هذه النظرية عندما $\varphi(P) \equiv 1$، ولا يختلف إثباتها فى حالتنا عن الحالة العادية.

واضح ، يأخذ الجهد نفس القيمة ولذا يكفى بحث جهد النقطة (x, y) الواقعة فى المستوى $z = 0$.



شكل ٥٤

نعين جهد المستقيم المتجانس اللانهائى L . نمد المحور z على امتداد هذا المستقيم . نفرض أن كتلة وحدة الطول تساوى μ . قوة جذب النقطة $P(x, 0)$ بالعنصر Δz (شكل ٥٤) ومركبتها على المحور x يساويان على الترتيب :

$$\Delta F = -\frac{\mu\, \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu\, \Delta z}{(x^2 + z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F \cos\alpha = -\mu\, \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + z^2)^3}}.$$

ومن هنا

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha = -\frac{2\mu}{x}$$

$$(z/x = \tan\ \alpha).$$

وإذا كانت النقطة $P(x, y)$ نقطة اختبارية فإن قوة جذب هذه النقطة بالمستقيم L ستكون متجهة على امتداد $\overrightarrow{OP}$ ومساوية فى المقدار :

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

حيث

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

وجهد هذه القوة يسمى بالجهد اللوغاريتمى ويساوى

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}, \tag{5}$$

وهو ما يسهل التأكد منه بالتفاضل مباشرة .

والجهد اللوغاريتمى هو حل معادلة لابلاس فى متغيرين مستقلين ، وهذا الحل له تماثل دائرى حول القطب فى النقطة $\rho=0$ حيث يؤول فيها إلى اللانهاية .

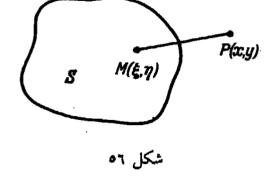
وبذلك فإن جهد المستقيم المتجانس يعطى مجالاً مستويًا ويعبر عنه بالعلاقة (5) . والتعبير عن الجهد فى صورة تكامل قد سبق أن حصلنا عليه للحجوم المحدودة* . ونشير إلى أنه على خلاف الجهد الحجمى لا يؤول الجهد اللوغاريتمى إلى الصفر فى اللانهاية وإنما يكون له هناك انفراد لوغاريتمى .

شكل ٥٥

نحسب الآن مركبات قوة الجذب للنقطة P (شكل ٥٥) :

$$X=F\cos\alpha=-2\mu\frac{x}{\rho^2}\qquad\left(\cos\alpha=\frac{x}{\rho}\right),$$
$$Y=F\sin\alpha=-2\mu\frac{y}{\rho^2}\qquad\left(\sin\alpha=\frac{y}{\rho}\right).$$

وإذا وجدت عدة نقط (أو عدة مستقيمات لانهائية بكتلة موزعة على امتدادها) فإن جهود النقط (المستقيمات) يتم جمعها . وذلك وفقًا لمبدأ تراكب مجالات القوى .



شكل ٥٦

* عند حساب جهد المستقيم اللانهائى لم يكن من الممكن تكامل جهود العناصر المنفردة بشكل مباشر لأنه فى هذه الحالة كان سينتج تكامل متباعد . بالفعل ، جهد العنصر Δz يساوى

$$\Delta u=\mu\frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

وتعطى عملية التكامل الشكلى تكاملا متباعدا

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

فى حالة المنطقة S ذات الكثافة الموزعة باتصال $\mu(\xi, \eta)$* (شكل ٥٦) يعبر عن مركبتى قوة جذب النقطة P بتكاملين ثنائيين :

$$\left.\begin{aligned} X &= -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta, \\ Y &= -2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\, d\xi\, d\eta, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ويكون الجهد مساويا

$$u(x, y) = 2 \iint_S \mu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta, \quad (7)$$

وهو ما لا يصعب التحقق منه بإجراء عملية التفاضل للنقط الواقعة خارج S . أما إذا كانت النقطة P تقع فى المنطقة S فمن الضرورى إجراء بحث إضافى .

فقرة ٣ : التكاملات المعتلة . تمثل الجهود ومركبات قوى الجذب بواسطة التكاملات حيث تؤول الدوال المكاملة لهذه التكاملات إلى المالانهاية إذا ما درسنا قيمها فى النقط الواقعة فى المنطقة التى تحتوى على كتل جاذبة .

وكما نعلم ، إذا كانت الدالة المكاملة تؤول عند نقطة معينة من نقط منطقة التكامل إلى المالانهاية فإن التكامل لا يمكن تعريفه كنهاية مجموع . بالفعل فى هذه الحالة لا يكون للمجموع التكاملى نهاية ، لأن الحد المتعلق بذلك الحجم الأوّلى (عنصر الحجم) المحتوى على النقطة المنفردة يمكن أن يغير بأى قدر حاد مقدار المجموع وفقًا لاختيار النقطة الوسطية . وتسمى التكاملات المأخوذة لمثل هذه الدوال بالتكاملات المعتلة (improper integrals) .

نفرض أنه فى المنطقة T معطاة الدالة $F(x, y, z)$ التى تؤول إلى المالانهاية عند نقطة معينة $M_0(x_0, y_0, z_0)$. ندرس التكامل المحدود المأخوذ على المنطقة $T - K_\varepsilon$ حيث K_ε جوار ما للنقطة M_0 قطره لا يفوق ε .

---

* هذا يناظر فى الفراغ أسطوانة ذات رواسم موازية للمحور z ومقطعها S فى المستوى (x, y) بكثافة حجمية $\mu(\xi, \eta)$ لا تعتمد على ζ .

وإذا كانت متتابعة التكاملات

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \quad (\varepsilon_n \to 0)$$

عند التضييق الاختيارى للمنطقة K_{ε_n} حتى تؤول إلى النقطة M_0 لها نهاية لا تعتمد على اختيار المناطق K_{ε_n} فإن هذه النهاية تسمى بالتكامل المعتل للدالة $F(x, y, z)$ على المنطقة T ويرمز له كالعادة بالرمز

$$\iiint\limits_{T} F\,d\tau.$$

وإذا وجدت ولو متتابعة واحدة من المناطق $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ بحيث إنه عندما $\varepsilon_n \to 0$ توجد النهاية $\bar{I}$ وللمتتابعات الأخرى K_{ε_n} يكون لهذه النهاية قيم أخرى ، أو لا توجد هذه النهاية على الإطلاق ، فإن النهاية $\bar{I}$ تسمى بالتكامل المعتل المتقارب شرطياً . ومن الواضح أنه عند دراسة التكامل المعتل المتقارب شرطياً $\bar{I}$ يجب تعيين تلك المتتابعة للمناطق $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ التى يعرف وفقاً لها هذا التكامل .

وسنكتفى هنا بدراسة تلك الحالة عندما يكون للدالة المكاملة انفراد فى نقطة معزولة . نبحث تقارب التكامل على الصورة :

$$\iiint\limits_{T} \frac{C}{R^{\alpha}}\,d\tau_M, \tag{8}$$

حيث $\alpha > 0$, C ثابتان ،

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + (z_0-\zeta)^2},$$

M_0 ـ نقطة من نقط المنطقة T . وبدون تحديد للعمومية يمكن اعتبار أن T عبارة عن كرة نصف قطرها R ومركزها فى النقطة M_0 . نأخذ بمثابة المنطقة K_{ε_n} كرة نصف قطرها ε_n ومركزها فى النقطة M_0 ونبحث عن نهاية متتابعة التكاملات

$$\iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{R^{\alpha}}\,d\tau = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{C}{r^{\alpha-2}}\,dr = 2\pi\cdot 2C\int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{dr}{r^{\alpha-2}} =$$

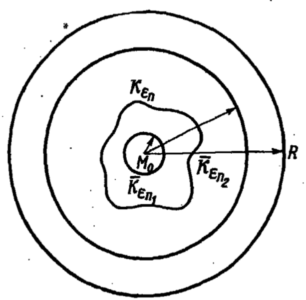
$$= \begin{cases} 4\pi C\left[\dfrac{1}{3-\alpha}\,r^{3-\alpha}\right]_{\varepsilon_n}^{R}, & \alpha \neq 3, \\ 4\pi C\,[\ln r]_{\varepsilon_n}^{R}, & \alpha = 3. \end{cases}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما يؤول ε_n إلى الصفر يتضح أنه عندما $\alpha < 3$ توجد نهاية ، وعندما $\alpha \geqslant 3$ لا توجد نهاية .

نوضح أنه إذا كانت الدالة $F(x, y, z)$ غير سالبة وتوجد النهاية

$$I_n = \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \qquad (\varepsilon_n \to 0),$$

حيث $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ كرة نصف قطرها ε_n ومركزها فى النقطة M_0 فإنه توجد نهاية



شكل ٥٧

للتكاملات I عند أى اختيار للمتتابعات K_{ε_n} المضمحلة إلى النقطة M ، وقيمة هذه النهاية لا تعتمد على شكل المنطقة K_{ε_n} . وأية منطقة K_{ε_n} يمكن حصرها بين سطحين كرويين $\overline{K}_{\varepsilon_{n_1}}$, $\overline{K}_{\varepsilon_{n_2}}$ نصفا قطريهما ε_{n_1} , ε_{n_2} يؤولان إلى الصفر مع ε_n (شكل ٥٧) . ووفقًا لأن الدالة المكاملة غير سالبة فإن

$$\iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n_1}}} F\, d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n_2}}} F\, d\tau.$$

ومن هنا يتضح أن

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\, d\tau = I,$$

وذلك لأن نهايتى التكاملين الأول والثالث موجودتان وتساويان هذا العدد .

وبذلك فى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة يكون التكامل المعتل

$$\iiint_T \frac{C}{R^{\alpha}}\, d\tau \tag{8}$$

موجودًا إذا كان $\alpha < 3$ وغير موجود إذا كانت $\alpha \geqslant 3$.

وفى حالة عدد آخر من المتغيرات المستقلة تكون القيمة الحرجة للبارامتر α ، التى تحدد حدود تقارب التكاملات على الصورة (8) ، مساوية لعدد الأبعاد (عدد المتغيرات المستقلة) فمثلاً فى حالة المتغيرين المستقلين يكون التكامل

$$\iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho^{\alpha}}\, d\sigma \quad \begin{cases} \text{متقاربًا عند } \alpha < 2 \text{ ،} \\ \text{متباعدًا عند } \alpha \geqslant 2 \text{ .} \end{cases}$$

ونتوقف عند اختبار تقارب التكاملات المعتلة . نثبت أنه :

لتقارب التكامل المعتل

$$\iiint_T F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{9}$$

يكفى أن توجد تلك الدالة $\bar{F}(x, y, z)$ التى يتقارب التكامل المعتل لها المأخوذ على المنطقة T وتتحقق لها المتباينة

$$|F(x, y, z)| < \bar{F}(x, y, z). \tag{10}$$

ندرس متتابعة ما من المناطق K_{ε} التى تحتوى النقطة المنفردة M_0 . ووفقًا لتقارب متتابعة التكاملات $\bar{I}_n$ للدالة $\bar{F}$ فإنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد ذلك $N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|\bar{I}_{n_1} - \bar{I}_{n_2}| = \left| \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \bar{F}\, d\tau \right| < \varepsilon,$$

بمجرد أن يكون $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. وحيث أن $\bar{F}$ تعتبر دالة الحد الأعظم (majorant) للدالة $F(x, y, z)$ فإنه يمكن كتابة :

$$|I_{n_1} - I_{n_2}| = \left| \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} F\, d\tau \right| \leqslant \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} |F|\, d\tau \leqslant \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \bar{F}\, d\tau < \varepsilon, \tag{10'}$$

إذا كان $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. وتحقق الشرط ($10'$) وفقًا لاختبار كوشى للتقارب يعتبر كافيًا لتقارب المتتابعة

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau$$

إلى نهاية معينة

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \iiint\limits_{T} F\, d\tau.$$

ولا يصعب أن نرى أن هذه النهاية لن تعتمد على شكل المناطق K_{ε_n} . وبذلك فإن وجود التكامل المعتل (9) قد أثبت .

وإذا أمكن لدالة ما $F(x, y, z)$ تعيين تلك الدالة الموجبة $\bar{F}(x, y, z)$ بحيث إن $F(x, y, z) > \bar{F}$ وكان التكامل المعتل للدالة $\bar{F}$ على المنطقة T متباعدًا فإن التكامل (9) سيكون متباعدًا كما هو واضح .

نتيجة : إذا تحققت لدالة ما $F(M, P)$ تؤول إلى اللانهاية عند $P = M$ المتباينة

$$|F(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^{\alpha}}, \quad \begin{array}{l} \alpha = \text{const} < 3, \\ C = \text{const} < \infty, \end{array}$$

فإن التكامل المعتل على المنطقة T المحتوية على النقطة M

$$\iiint\limits_{T} F(M, P)\, d\tau_P$$

يتقارب .

ومن نظرية التكاملات اللامعتلة المعتمدة على البارامترات نعلم أن اتصال الدالة المكاملة بالنسبة إلى البارامترات والمتغيرات المستقلة يعتبر شرطًا كافيًا لاتصال التكامل نفسه كدالة فى البارامترات* . وفى حالة التكاملات المعتلة لا يتحقق اتصال الدالة المكاملة ولذلك فالمعيار المشار إليه غير قابل للتطبيق . نثبت معيار اتصال التكاملات المعتلة المعتمدة على بارامترات .

* انظر كتاب بيسكونوف «التكامل والتفاضل» الجزء الثانى طبعة دار «مير» باللغة العربية .

سندرس التكاملات المعتلة

$$V(M)=\int_T F(P,\ M)f(P)\,d\tau_P, \qquad (11)$$

حيث $F(P,\ M)$ دالة تؤول إلى اللانهاية عند انطباق متغيريها ومتصلة بالنسبة إلى M . و $f(P)$ دالة محدودة .

يسمى التكامل (11) تكاملاً متقاربًا بانتظام فى النقطة M_0 إذا أمكن لأى عدد $\varepsilon>0$ تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث تتحقق المتباينة

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(M)|=\left|\int_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(P,\ M)f(P)\,d\tau_P\right|\leqslant\varepsilon$$

لأية نقطة M بعدها عن M_0 أصغر من $\delta(\varepsilon)$ ولأية منطقة $T_{\delta(\varepsilon)}$ تحتوى النقطة M_0 وقطرها $d\leqslant\delta(\varepsilon)$.

نثبت أن التكامل

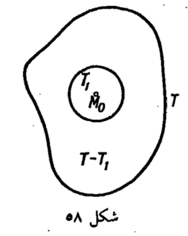
$$V(M)=\int_T F(P,\ M)f(P)\,d\tau_P,$$

المنتظم التقارب فى النقطة M_0 . هو دالة متصلة فى هذه النقطة . ويجب علينا أن نثبت أنه لأى ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|V(M_0)-V(M)|<\varepsilon$$

عندما

$$|\overrightarrow{MM_0}|<\delta(\varepsilon).$$



شكل ٥٨

نختار داخل المنطقة T منطقة ما T_1 تحتوى النقطة M_0 (شكل ٥٨) ونقسم التكامل إلى حدين

$$V=V_1+V_2,$$

حيث V_1 يؤخذ على المنطقة T_1 و V_2 يؤخذ على المنطقة $T_2=T-T_1$. وفى المستقبل سنعرّف بدقة أكثر مقاييس المنطقة T_1 . ندرس المتباينة

$$|V(M_0)-V(M)|\leqslant|V_2(M_0)-V_2(M)|+|V_1(M_0)|+|V_1(M)|$$

ونبين أنه يمكن جعل كل حد من حدود الطرف الأيمن أصغر من $\varepsilon/3$ عند $|\overrightarrow{M_0M}|$ الصغير صغرًا كافيًا . باختيار المنطقة T_1 داخل كرة نصف قطرها $\delta(\varepsilon/3)$ سنحصل على :

$$|V_1(M_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad |V_1(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

إذا كان $|\overrightarrow{M_0M}| \leqslant \delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$.

وينتج وجود δ' هذا من شرط التقارب المنتظم للتكامل (11) فى النقطة M_0 . واختيار المنطقة T_1 يحدد المنطقة T_2 .

وحيث إن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 فإن التكامل V_2 يعتبر دالة متصلة فى هذه النقطة .

ومن هنا ينتج وجود $\delta''(\varepsilon/3)$ بحيث إن

$$|V_2(M_0) - V_2(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{عندما} \quad |\overrightarrow{M_0M}| \leqslant \delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

وبفرض أن

$$\delta(\varepsilon) = \min[\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon)],$$

نحصل على

$$|V(M) - V(M_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{عندما} \quad |\overrightarrow{MM_0}| \leqslant \delta \text{ ،}$$

مما يعنى اتصال التكامل المنتظم التقارب .

ونشير إلى أن النتائج التى حصلنا عليها صحيحة ليس للتكاملات المأخوذة على الحجوم فحسب وإنما هى صحيحة أيضًا للتكاملات على السطوح والمنحنيات . وهذا الموضوع سنستخدمه فى المستقبل .

ندرس التكامل

$$V(M) = \iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\, d\tau_P \tag{12}$$

ومركبات قوة الجذب :

$$\left.\begin{aligned} X(M) &= -\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3}(x-\xi)\,d\tau_P; \\ Y(M) &= -\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3}(y-\eta)\,d\tau_P; \\ Z(M) &= -\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3}(z-\zeta)\,d\tau_P \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

فى النقط الواقعة داخل الجسم الجاذب T . تكون التكاملات المعتلة (12) ، (13) متقاربة إذا كانت الكثافة $\rho(M)$ محدودة ، $|\rho(M)| < C$. وللجهد $V(M)$ يكون ذلك واضحًا لأن

$$\frac{|\rho|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \qquad (\alpha = 1 < 3).$$

ولمركبات قوة الجذب ينتج ذلك من المتباينة

$$\frac{|\rho|}{R^2}\,\frac{|x-\xi|}{R} < \frac{C}{R^\alpha} \qquad (\alpha = 2 < 3),$$

لأن $|x-\xi| < R$.

ولتوضيح مفهوم التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة نبين أن التكاملات (13) و (12) تعتبر دوال متصلة .

ولهذا الغرض يجب إثبات أن التكاملات (13) ، (12) منتظمة التقارب فى كل نقطة M_0 .

نحسب القيمة المطلقة للتكامل*

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta} \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P\right| \leqslant C \iiint\limits_{K_\delta^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

حيث $K_\delta^{M_0}$ كرة نصف قطرها δ ومركزها فى النقطة M_0 وتحتوى المنطقة T_δ . غير أن حساب هذا التكامل على المنطقة $K_\delta^{M_0}$ التى مركزها فى النقطة M_0 لا يكون

* نشير إلى أن التكامل (12) ينتج من التكامل (11) عند $f(P) = \rho(P)$ ، $F(M,P) = 1/R_{MP}$.

مريحًا . فلحساب التكامل الأخير يكون من الأنسب الانتقال إلى مجموعة الإحداثيات الكروية التى نقطة أصلها فى النقطة M . ومن الواضح أن

$$\left|C\iiint\limits_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right|\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right|=C8\pi\delta^2,$$

حيث $K_{2\delta}^{M}$ كرة نصف قطرها 2δ ومركزها فى النقطة M . وإذا أُعطينا عددًا ما $\varepsilon>0$ واخترنا

$$\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

فإننا سنتأكد من التقارب المنتظم للتكامل V .

وبتكرار نفس التحليل السابق للتكامل :

$$X(M)=-\iiint\limits_{T}\rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}d\tau_P,$$

نحصل على :

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta}\rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^2}d\tau_P\right|\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}^2}\right|\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}^2}\right|=8\pi\delta C\leqslant\varepsilon,$$

إذا كان

$$\delta\leqslant\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

وبذلك فإن الجهد V ومركبات قوة الجذب X, Y, Z تكون دوال متصلة فى كل الفراغ* .

فقرة ٤ : المشتقات الأولى للجهد الحجمى . إن الدوال تحت علامة التكاملات

$$X(M)=-\iiint\limits_{T}\rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}d\tau_P,\quad Y(M),\quad Z(M),$$

هى عبارة عن المشتقات بالمتغيرات المناظرة للدالة تحت علامة التكامل

---

* إن التقارب المنتظم للتكاملين $V(M)$ ، $X(M)$ أثبت بفرض محدودية الكثافة $|\rho|<C$. وبالتالى فإن هذين التكاملين متصلان أيضا عند نقط انفصال الدالة ρ ـ على سبيل المثال على حدود المنطقة المملوءة بالكتل .

$$V(M)=\iiint\limits_{T}\frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_{P}.$$

وإذا كانت عملية التفاضل تحت علامة التكامل قانونية للدالة V فإن

$$X=\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial V}{\partial z},\tag{14}$$

أى أن V يعتبر جهدًا للمجال الذى مركباته تساوى X, Y, Z .

وإذا وقعت النقطة M خارج المنطقة T فإن الدالة :

$$-\frac{x-\xi}{R_{MP}^{3}}=\frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}+(z-\zeta)^{2}]^{3/2}}=\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{R_{MP}}$$

تكون متصلة بالنسبة إلى المتغيرين $P(\xi, \eta, \zeta)$, $M(x, y, z)$. وبالتالى فى هذه الحالة يكون التفاضل تحت علامة التكامل V قانونيًّا .

والمشتقات من رتب أعلى يمكن حسابها أيضًا بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل فى كل مكان خارج T . ومن هنا ووفقًا للمأخوذة الواردة فى الباب الثالث ، بند ٣ ينتج أن الجهد خارج الكتل الجاذبة يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta V=0 \quad \text{خارج} \quad T\ .$$

نثبت أن حساب مشتقات الجهد V يمكن إجراؤه بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل أيضًا عندما تكون النقطة M واقعة داخل الجسم T .

وعند الإثبات سنستعين فقط بكون الدالة $\rho(x, y, z)$ محدودة ($|\rho(x, y, z)|<C$)دون افتراض اتصالها ، ومن هنا سينتج أن الدالة $V(x, y, z)$ قابلة للتفاضل فى نقط الحدود التى يمكن اعتبارها نقطًا لانفصال الدالة $\rho(x, y, z)$ المساوية للصفر خارج الجسم .

نوضح أنه لأى ε يمكن تعيين $\delta(\varepsilon)$ بحيث إن

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x}-X\right|<\varepsilon,$$

إذا كان

$$|\Delta x| < \delta(\varepsilon).$$

نحصر النقطة M_0 فى كرة صغيرة بدرجة كافية $K_{\delta'}^{M_0}$ سندقق مقاييسها فيما بعد ، ونقسم V إلى حدين :

$$V = V_1 + V_2,$$

حيث V_2 ، V_1 يناظران عملية التكامل على الحجم $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ وعلى الحجم الإضافى $T_2 = T - K_{\delta'}^{M_0}$. وعندئذ فإن :

$$\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \\ = \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x}.$$

ولأى مقاييس مثبتة للمنطقة T_1 يكون

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} = X_2 = \iiint_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau,$$

وذلك لأن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 .

بوضع $X = X_1 + X_2$ نقدر المقدار

$$\left| X - \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right| \leqslant \\ \leqslant \left| X_2 - \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} \right| + |X_1| + \\ + \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \right|$$

ونوضح أنه يمكن جعل كل حد أصغر من $\varepsilon/3$. بالفعل

$$|X_1| = \left| \iiint_{T_1} \rho \frac{x-\xi}{R^3} d\tau \right| < C \int_0^{\delta'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr}{r^2} = 4\pi C \delta' < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{15}$$

وذلك لأن $\left|\frac{x-\xi}{R}\right| < 1$ ، $|\rho| < C$. ندرس الحد الأخير

$$|S| = \left|\frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\iiint_{T_1} \rho\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) d\tau\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\iiint_{T_1} \rho \frac{R - R_1}{RR_1} d\tau\right|,$$

حيث

$$R_1 = \sqrt{[(x+\Delta x) - \xi]^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2};$$
$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

وأضلاع المثلث M_0MM_1 تساوى $|\Delta x|$ ، r, r_1 . ومن هنا ينتج أن

$$|R - R_1| \leqslant |\Delta x|.$$

ولذا فإن

$$|S| \leqslant C \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{RR_1} \leqslant C\frac{1}{2}\left\{\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} + \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2}\right\},$$

وذلك لأنه لأى عددين b ، a يكون

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

وعند ذلك فإن

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta' \quad , \quad \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} \leqslant \iiint_{K_{2\delta'}^{M_1}} \frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

حيث $K_{2\delta'}^{M_1}$ كرة نصف قطرها $2\delta'$ ومركزها فى النقطة M_1 .

وبالاختيار المناسب للعدد δ' يمكن أن نكفل تحقق المتباينة

$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16)$$

باختيار δ' من الشرط (16) نحقق المتباينتين (16) ، (15). والآن نقوم بتثبيت المنطقة $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ ومن ثم المنطقة $T_2 = T - T_1$.

المتساوية (14) مطبقة على المنطقة المختارة T_2 تعنى أنه لأى ε يمكن تعيين δ'' بحيث أن

$$\left|\frac{V_2(x+\Delta x, y, z)-V_2(x, y, z)}{\Delta x}-X_2\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

بمجرد أن يكون $|\Delta x|<\delta''$. وأخيرًا باختيار $\delta=\min[\delta', \delta'']$ نحصل على :

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x}-X\right|<\varepsilon,$$

إذا كان $|\Delta x|<\delta$. وبذلك أثبتنا وجود المشتقة $\frac{\partial V}{\partial x}$ التى تساوى

$$\frac{\partial V}{\partial x}=X. \qquad (17)$$

ولا تتطلب العلاقتان

$$\frac{\partial V}{\partial y}=Y \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z}=Z$$

إثباتًا خاصًّا .

وهكذا أثبتنا أن التفاضل تحت علامة التكامل قانونى وأن مركبات مجال القوى X, Y, Z هى مركبات $\operatorname{grad} V$.

فقرة ٥ : المشتقات الثانية للجهد الحجمى. إن التكامل المعتل

$$\iiint_T \rho(P)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\tau_P=-\iiint_T \rho\left(\frac{1}{R^3}-3\,\frac{(x-\xi)^2}{R^5}\right)d\tau \qquad (18)$$

لا يتقارب تقاربًا مطلقًا للنقط الداخلية P فى الجسم T . وفى هذه الحالة تكون الدالة الحد الأعظم (majorant) للدالة المكاملة على الصورة

$\frac{C}{R^\alpha}$ عندما $\alpha=3$.

نثبت علاقات تحسب بها داخل T المشتقات الثانية للجهد V بافتراض الاتصال وقابلية التفاضل باتصال للكثافة $\rho(x, y, z)$ فى جوار النقط محل البحث . وكحالة خاصة لا يكون البحث المجرى فيما سيلى قابلاً للتطبيق على النقط

الحدية حيث توجد ــ كقاعدة ــ للكثافة انفصالات.

نعبر عن الجهد V فى صورة مجموع حدين

$$V = V_1 + V_2,$$

يتعلقان بالمنطقتين T_2 , T_1 حيث $T_1 = K_\delta^{M_0}$ كرة نصف قطرها δ ومركزها فى النقطة محل الدراسة M_0 وداخل هذه الكرة تكون الدالة ρ قابلة للتفاضل.

ويمكن حساب المشتقة الثانية للجهد V_2 بالتفاضل تحت علامة التكامل لأن النقطة M_0 تقع خارج المنطقة T_2 :

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \iiint\limits_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau.$$

والمشتقة الأولى للدالة V_1 بالنسبة إلى x تساوى

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iiint\limits_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint\limits_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau, \qquad (19)$$

وذلك لأن

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right).$$

نحول التكامل (19) بالاستعانة بعلاقة اوستروجرادسكى

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\iiint\limits_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint\limits_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right] d\tau =$$
$$= -\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\rho}{R} \cos\alpha \, d\sigma + \iiint\limits_{T_1} \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau,$$

حيث $\Sigma_\delta^{M_0}$ سطح الكرة الذى يحد الحجم T_1 ، α الزاوية بين العمودى الخارجى على السطح $\Sigma_\delta^{M_0}$ والمحور x . والحد الأول عبارة عن دالة قابلة للتفاضل فى النقطة M_0 لأن M_0 تقع خارج $\Sigma_\delta^{M_0}$. والحد الثانى فى جوار النقطة M_0 يعتبر أيضًا دالة قابلة للتفاضل لأن الدالة ρ لها مشتقة فى T_1 . ومن هنا

ينتج أنه فى النقطة M_0 توجد مشتقة ثانية للدالة V_1 . ننتقل إلى حسابها :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)=-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\sigma+\iiint\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, d\tau.$$

وللحد الثانى يتحقق فى النقطة M_0 التقدير التالى :

$$\left|\iiint\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\, d\tau\right|<C_1\iiint\limits_{T_1}\frac{d\tau}{R^2}=C_1 4\pi\delta \quad (20)$$

إذا كان $\left|\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right|<C_1$.

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على التكامل السطحى نحصل على :

$$-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\sigma=-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho\frac{\cos^2\alpha}{R^2}\, d\sigma=-\rho^*\frac{4\pi}{3} ,$$

حيث ρ^* هنا هو قيمة الكثافة فى نقطة ما من نقط $\Sigma_\delta^{M_0}$ ،

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{x-\xi}{R^3}=-\frac{1}{R^2}\cos\alpha$$

وعلاوة على ذلك فإن

$$\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\frac{\cos^2\alpha}{R^2}\, d\sigma=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}}\frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\, d\sigma=\frac{4}{3}\pi.$$

ويعطى الانتقال إلى النهاية عندما $\delta\to 0$ ما يلى :

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}=\lim_{\delta\to 0}\left[-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\sigma\right]=-\frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \quad (21)$$

والمتساوية

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

صحيحة لأى δ وطرفها الأيسر لا يعتمد على δ ولذا فإن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right)=-\frac{4\pi}{3}\rho(M)+\lim_{\delta\to 0}\iiint\limits_{T_2}\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau. \quad (22)$$

ومن وجود المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ المثبت فيما سبق ينتج وجود

$$\lim_{\delta\to 0}\iiint_{T_\delta} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = \overline{\iiint_T} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \qquad (23)$$

والتكامل الأخير حصلنا عليه بطريقة خاصة للانتقال النهائى عندما تكون المناطق المضمحلة إلى النقطة M_0 كرات* ، وذلك ما أشرنا إليه بخط فوق علامة التكامل فى العلاقة (23) . وتغير أشكال هذه المناطق بوجه عام يمكن أن يغير قيمة النهاية . ويجب اعتبار التكامل (23) بمثابة تكامل متقارب شرطيا . وبذلك فإن

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_0) = \overline{\iiint_T} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau - \frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \qquad (24)$$

ومن هنا يتضح أن حساب المشتقات الثانية للجهد بواسطة التفاضل الشكلى تحت علامة التكامل كان سيؤدى بنا إلى نتيجة خاطئة .

وتنتج للمشتقتين $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ، $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ صيغتان مماثلتان . بالتعويض بقيم المشتقات الثلاث فى صيغة مؤثر لابلاس نجد أن

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$
$$= \overline{\iiint_T} \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] d\tau - 4\pi\rho(M_0) =$$
$$= -4\pi\rho(M_0), \qquad (25)$$

وذلك لأن $1/R$ دالة توافقية** .

وبذلك يحقق الجهد الحجمى معادلة بواسون

$\Delta V = -4\pi\rho$ داخل الجسم ،

* تسمى النهاية (23) عادة بالقيمة الأساسية للتكامل .

** حصلنا على العلاقة (25) بفرض قابلية الدالة ρ للتفاضل وهو ما يعتبر شرطا كافيا ويمكن استبداله بشروط أقل قوة أو أقل تحديدا . غير أن شروط اتصال الدالة $\rho(M)$ ليست كافية لصحة العلاقة (25) لأنه توجد أمثلة لدوال متصلة $\rho(M)$ لا يوجد لجهدها الحجمى مشتقات ثانية .

ومعادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad \text{خارج الجسم} .$$

والمعادلة اللامتجانسة

$$\Delta u = -f \tag{25'}$$

بشرط قابلية الدالة f للتفاضل داخل منطقة ما T ، لها حل خاص

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{f\, d\tau}{R}.$$

ومن هنا ينتج على وجه الخصوص أن حل المسألة الحدية للمعادلة اللامتجانسة (25′) يمكن أن يؤول إلى حل مسألة حدية مماثلة لمعادلة لابلاس $\Delta v = 0$ إذا عبرنا عن الدالة المجهولة فى صورة المجموع $u = u_0 + v$

فقرة ٦ : الجهود السطحية . كما تبين علاقة جرين الأساسية

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \right] d\sigma_P,$$

يمكن التعبير عن أية دالة توافقية بواسطة تكاملات تعتبر جهوداً سطحية .

ندرس مجالاً متكوناً بكتل موزعة على السطح* ، ونعين جهد هذا المجال . والكثافة السطحية $\mu(P)$ فى النقطة P من نقط السطح Σ هى عبارة عن نهاية نسبة الكتلة الموجودة على عنصر سطح ما $d\sigma$ من السطح Σ يحتوى على النقطة P إلى مساحته عندما يضمحل $d\sigma$ ويؤول إلى النقطة P . وجهد هذه الكتل يعبر عنه بالتكامل السطحى

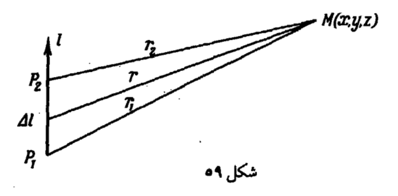
$$V(M) = \iint_\Sigma \frac{\mu(P)}{R_{MP}} d\sigma_P, \tag{26}$$

---

* إذا كانت الكتل ذات الكثافة الحجمية ρ واقعة فى طبقة ما سمكها h قرب السطح Σ وكان المجال يدرس على المسافات الكبيرة بالمقارنة مع h $(h/R \ll 1)$ فلا يكون هناك معنى بوجه عام لأخذ السمك فى الاعتبار . فبدلا من الجهد الحجمى ذى الكثافة ρ من المناسب دراسة الجهد السطحى ذى الكثافة السطحية $\mu = \rho h$.

الذى يسمى بجهد الطبقة البسيطة أو طبقة الشحن (layer of charge) .

ويعتبر جهد الطبقة الثنائية (double layer) نوعًا آخر من أنواع الجهد السطحى . ننتقل إلى تعريفه .



شكل ٥٩

ندرس ذا القطبين* المتكون من الكتلتين $+m$ ، $-m$ الواقعتين فى النقطتين P_2 ، P_1 على بعد Δl (شكل ٥٩) . وحاصل الضرب $m\cdot\Delta l = N$ يسمى بعزم ذى القطبين . وجهد ذى القطبين فى نقطة ما $M(x, y, z)$ يساوى

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

حيث r_2 ، r_1 بعدا النقطة M عن النقطتين P_2 ، P_1 .

وإذا كان Δl صغيرا بالمقارنة مع البعد عن النقطة M $(\Delta l/r_1 \ll 1)$ فإننا بالاستعانة بنظرية التغيرات المحدودة (نظرية لاجرانج) يمكننا أن نكتب :

$$V = N\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

حيث تؤخذ المشتقة بالاتجاه من الكتلة النافرة (الطاردة) إلى الكتلة الجاذبة ، R بعد النقطة $M(x, y, z)$ عن نقطة ما وسطية $P(\xi, \eta, \zeta)$ على الجزء المستقيم Δl .

---

* dipole : يعرف ذو القطبين بأنه مجموعة من شحنتين كهربائيتين أو من قطبين مغناطيسيين متساويى المقدار ومختلفى الإشارة ، يكون البعد بينهما (الذراع) صغيرا بالمقارنة مع بعد مركز ذى القطبين عن نقط المجال محل الدراسة (ملاحظة المترجم) .

نحسب المشتقة بالاتجاه l :

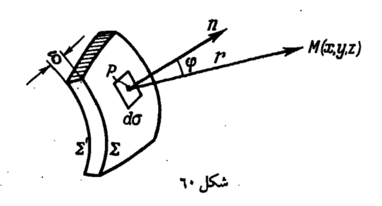
$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{R^2}\cos(r, l)=\frac{\cos\varphi}{R^2}$$

حيث المتجه r يتجه من ذى القطبين إلى النقطة المثبتة M ، φ هى الزاوية بين المتجه l والمتجه r . وبذلك فجهد ذى القطبين يساوى

$$V(M)=N\frac{\cos\varphi}{R^2}, \tag{27}$$

حيث N عزم ذى القطبين .

نفرض أنه على السطحين Σ' , Σ (شكل ٦٠) اللذين يبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة δ قد وزعت كتل بحيث إن كتلة كل عنصر من عناصر السطح Σ'



شكل ٦٠

تكون مساوية فى المقدار ومختلفة فى الإشارة مع كتلة عنصر السطح المناظر من عناصر السطح Σ . نرمز بالرمز n إلى العمودى المشترك على السطحين Σ' , Σ المتجه من الكتل النافرة (الطاردة) إلى الجاذبة . وبالانتقال إلى النهاية عندما $\delta\to 0$ نحصل على الطبقة الثنائية كمجمل الطبقتين البسيطتين ذاتى الكثافتين المتضادتين اللتين تبعدان عن بعضهما بمسافة صغيرة . وإذا كانت ν هى الكثافة السطحية للعزم فإن عزم عنصر السطح $d\sigma_P$ سيكون مساويًا :

$$dN=\nu\, d\sigma_P;$$

ولجهد العنصر $d\sigma$ فى النقطة $M(x, y, z)$ سنحصل على :

$$\nu\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P=\nu(P)\frac{\cos\varphi_1}{R_{MP}^2}d\sigma_P,$$

حيث $\varphi_1 = (\widehat{\vec{n}\,\vec{PM}})$.

نسمى التكامل

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, d\sigma_P \tag{28}$$

بجهد الطبقة الثنائية . ومن الواضح أن هذا التعريف يناظر تلك الحالة عندما تكون الناحية الخارجية للسطح نافرة والناحية الداخلية جاذبة .

ومن الواضح أن

$$W = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} \nu(P)\, d\sigma_P,$$

حيث φ الزاوية بين العمودى الداخلى والاتجاه من نقطة السطح P إلى النقطة المثبتة M . وإذا كان السطح غير مغلق فيجب أن نعتبره ذا ناحيتين لأن جهد الطبقة الثنائية يتحدد فقط لمثل هذه السطوح .

وجهدا الطبقتين البسيطة والثنائية فى حالة المتغيرين يكونان على الصورة :

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}}\, ds, \tag{29}$$

$$W = -\int_C \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\ln \frac{1}{R_{MP}}\right) ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds, \tag{30}$$

حيث C منحنى ما ، μ الكثافة الخطية للطبقة البسيطة ، ν كثافة عزم الطبقة الثنائية الخطية ، φ هى الزاوية بين العمودى الداخلى على المنحنى C والاتجاه إلى النقطة المثبتة .

وإذا كانت نقطة الملاحظة $M(x, y, z)$ موجودة خارج السطح (خارج الكتل الجاذبة) فإن الدوال المكاملة ومشتقاتها بالنسبة إلى x, y, z من أية رتبة فى العلاقتين :

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}}\, d\sigma_P, \qquad W(M) = -\iint_{\Sigma} \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P$$

تكون دوال متصلة فى المتغيرات x, y, z . ولذا فى النقط الواقعة خارج السطح Σ ، يمكن حساب مشتقات الجهود السطحية بواسطة التفاضل تحت علامة التكامل . ومن هنا ووفقًا لمبدأ التراكب ينتج أن الجهود السطحية تحقق معادلة لابلاس فى كل مكان خارج الكتل الجاذبة . ومن الواضح أن الدالتين (30) و(29) تحققان معادلة لابلاس فى المتغيرين المستقلين .

والجهود السطحية فى نقط السطح Σ يعبر عنها بتكاملات معتلة . نوضح أنه إذا كان للسطح إنحناء (تقوس) متصل فإن جهد الطبقة الثنائية فى نقط هذا السطح يكون موجودًا . نجرى الإثبات لحالة المتغيرين المستقلين :

$$W = \int_C \frac{\cos\varphi}{R} \nu \, ds.$$

ندرس منحنى على المستوى (x, y) ونختار نقطة الأصل فى النقطة P ونمد المحور x على امتداد المماس والمحور y على امتداد العمودى فى هذه النقطة (شكل ٦١) . ومعادلة المنحنى فى جوار ما للنقطة P تكتب على الصورة :

$$y = y(x).$$

شكل ٦١

وللمنحنى وفقًا للتعريف إنحناء متصل أى أن $y(x)$ لها مشتقة ثانية متصلة . ولذا فإن

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\theta x) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1),$$

ومن هنا ونتيجة لاختيار محورى الإحداثيات نجد أن

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\theta x).$$

ومن هنا نحصل على :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4 \left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2} = x \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{R} = \frac{xy''(\theta x)}{2\sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2}},$$

$$\frac{\cos\varphi}{R}=\frac{y''(\theta x)}{2\left\{1+x^2\left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2\right\}}.$$

ومن صيغة الانحناء $K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ ينتج أن $y''(0)=K(P)$ ولذا فإن

$$\lim_{MP\to 0}\frac{\cos\varphi}{R}=\frac{1}{2}K(P),$$

مما يثبت اتصال $\frac{\cos\varphi}{R}$ على امتداد القوس ومن ثم وجود جهد الطبقة الثنائية فى نقط المنحنى C للدالة المحدودة ν .

وجهد الطبقة الثنائية فى حالة المتغيرات الثلاثة المستقلة أيضًا يكون موجودًا فى نقط السطح ذات الانحناء المحدود لأن الدالة $\frac{\cos\varphi}{R^2}$ لها انفراد قابل للتكامل من الرتبة $1/R$. ولا يثير وجود جهد الطبقة البسيطة أية شكوك .

فقرة ٧ : سطوح ومنحنيات ليابونوف . يتضح أن اشتراط محدودية الانحناء لوجود الجهود السطحية يكون زائدًا عن الحاجة .

إن جهدى الطبقتين الثنائية والبسيطة فى نقط السطح Σ يعتبران تكاملين معتلين. نبين أن هذين التكاملين يتقاربان لفصل معين من السطوح تسمى بسطوح ليابونوف . إذا كانت كثافة الجهد دالة محدودة $|\nu(P)|<C$ حيث C ثابت ما .

ويسمى السطح بسطح ليابونوف إذا تحققت الشروط التالية :

١ ـ فى كل نقطة من نقط السطح Σ يوجد عمودى معرف (مستوى مماس) .

٢ ـ يوجد ذلك العدد $d>0$ بحيث إن المستقيمات الموازية للعمودى على السطح Σ فى نقطة معينة P لا تقطع أكثر من مرة واحدة الجزء Σ'_p من السطح Σ الواقع داخل كرة نصف قطرها d ومركزها فى p . وأجزاء السطح هذه Σ'_p تسمى بجوارات ليابونوف .

٣ ـ الزاوية $\gamma(P,P')=(\widehat{n_P,n_{P'}})$ المتكونة بين العموديين فى النقطتين P ، P' تحقق الشرط التالى :

$$\gamma(P,P')<Ar^{\delta}, \tag{31}$$

حيث r البعد بين النقطتين P ، P' ، A ثابت ما و $0<\delta\leqslant 1$.

نفرض أن P_0 نقطة ما من نقط السطح Σ . نختار مجموعة الإحداثيات المتعامدة بوضع نقطة الأصل عند النقطة P_0 وتوجيه المحور z فى اتجاه العمودى الخارجى . وينطبق المستوى (x,y) عندئذ على المستوى المماس . وتبعًا للشرط ٢ يوجد ρ_0 بحيث إن معادلة السطح Σ يمكن التعبير عنها فى الصورة :

$$z = f(x, y)\ * \qquad (32)$$

لحالة .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0. \qquad (33)$$

نرمز بالرمز Σ'_{P_0} لجوار النقطة P_0 على السطح Σ والمعرف بالشرطين (32) و (33) . نثبت بعض التقديرات للدالة $f(x, y)$ ومشتقاتها .

من وجود العمودى فى كل نقطة من نقط السطح (الشرط ١) تنتج قابلية الدالة $f(x, y)$ للتفاضل . وجيوب التمام الاتجاهية للعمودى (الخارجى) تعطى بالصيغ :

$$\cos\alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos\beta = \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

وتبعًا لاختيار مجموعة إحداثياتنا يكون $z_x(P_0) = 0$ ، $z_y(P_0) = 0$. وسنعتبر أن السطح Σ'_{P_0} صغير (بنفس درجة صغر ρ_0) لدرجة أن

$$1 \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > \frac{1}{2}. \qquad (34)$$

نرمز بالرمز n'_P إلى مسقط المتجه n_P على المستوى (x, y) وبالرمزين α' ، β' إلى الزاويتين اللتين يصنعهما المتجه n'_P مع المحورين y ، x . من الواضح أن

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\alpha', \quad \cos\beta = \sin\gamma\sin\alpha'.$$

وحيث إن $\sin\gamma < \gamma$ فإنه وفقًا للشرط ٣ يكون

$$\sin\gamma < Ar^{\delta}_{PP_0}$$

وبالتالى

$$|\cos\alpha| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |\cos\beta| < Ar^{\delta}_{PP_0}. \qquad (35)$$

وحيث إن $z_x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z_y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ علمًا بأن $\frac{1}{\cos\gamma} < 2$ فإن

$$|z_x| < 2Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |z_y| < 2Ar^{\delta}_{PP_0}.$$

---

* نشير إلى أنه إذا كانت للدالة $f(x, y)$ مشتقات ثانية متصلة فى جوار النقطة P_0 فإن السطح $z = f(x, y)$ يحقق شروط ليابونوف . وبذلك فإن السطوح ذات الانحناء المتصل تكون سطوح ليابونوف .

وبالاستعانة بعلاقة (مفكوك) تيلور للدالة $z=f(x, y)$ فى جوار النقطة $P_0(0, 0)$ نحصل على :

$$z(x, y)=z(0, 0)+xz_x(\bar{x}, \bar{y})+yz_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

حيث $0\leqslant\bar{y}\leqslant y$ ، $0\leqslant\bar{x}\leqslant x$. ومن هنا ينتج أن

$$|z(x, y)|<4Ar_{PP_0}^{1+\delta}. \tag{36}$$

والتقديران الناتجان (36) ، (34) يكفلان إثبات أن جهد الطبقة الثنائية

$$W(M)=\iint_{\Sigma}\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}\nu(P)\,d\sigma_P \tag{28}$$

فى النقط الواقعة على السطح Σ يكون تكاملاً معتلاً متقاربًا إذا كان Σ سطح ليابونوف . نفرض أن $M=P_0$ نقطة من نقط السطح Σ . باختيار مجموعة الإحداثيات كما سبق نعبر عن معادلة السطح Σ فى جوار النقطة P_0 على الصورة :

$$z=f(x, y).$$

الدالة $f(x, y)$ تحقق الشرطين (36) ، (34) . نحسب $\cos\varphi$ حيث φ الزاوية بين اتجاه العمودى الداخلى فى النقطة $P(\xi, \eta, \zeta)$ واتجاه $\overrightarrow{PP_0}$. وليس من الصعب ملاحظة أن :

$$|\cos\varphi|=\left|\frac{\xi}{R}\cos\alpha+\frac{\eta}{R}\cos\beta+\frac{\zeta}{R}\cos\gamma\right|\leqslant|\cos\alpha|+|\cos\beta|+\frac{|\zeta|}{R}\leqslant$$
$$\leqslant AR_{PP_0}^{\delta}+AR_{PP_0}^{\delta}+4AR_{PP_0}^{\delta}=6AR_{PP_0}^{\delta}$$

وأن

$$\left|\frac{\cos\varphi}{R^2}\right|\leqslant 6A\frac{1}{R^{2-\delta}}\qquad(0<\delta\leqslant 1). \tag{37}$$

نعبر عن W فى صورة مجموع تكاملين

$$W=W_1+W_2,$$

حيث W_1 تكامل مأخوذ على السطح Σ'_{P_0} الذى يحتوى النقطة المنفرده P_0 والتكامل W_2 يؤخذ على الجزء الباقى من السطح $\Sigma-\Sigma'_{P_0}$. وحيث إن الدالة المكاملة فى التكامل W_2 لا تؤول إلى اللانهاية فإنه لتقارب التكامل W يكفى التأكد من تقارب التكامل W_1 . وحيث إن

$$d\sigma=\frac{d\xi\,d\eta}{\cos\gamma}=\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\cos\gamma},$$

حيث $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ ، θ الإحداثيان القطبيان فى المستوى (x, y) فإن تحويل المتغيرات فى هذا التكامل يعطى :

$$W_1 = \iint\limits_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\cos\varphi}{R^2_{PP_0}} \nu(P)\, d\sigma_P = \int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{R^2_{PP_0}} \nu(P) \frac{1}{\cos\gamma} \rho\, d\rho\, d\theta.$$

وللدالة المكاملة نحصل وفقًا للتقديرات (37) ، (36) ، (34) على :

$$\left| \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{1}{\cos\gamma} \right| \leqslant \bar{F} = \frac{12AC}{\rho^{2-\delta}},$$

لأن $\rho < R$.

وهذه الصورة لدالة الحد الأعظم $\bar{F}$ تكفل تقارب التكامل المعتل فى حالة المتغيرين المستقلين (انظر فقرة ٣) .

وليس من الصعب إثبات أنه لسطح ليابونوف يتقارب أيضًا جهد الطبقة البسيطة

$$V(M) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P \tag{26}$$

فى نقط السطح . وينبغى الإشارة إلى أن هذا التقارب يتحقق أيضًا لسطوح من فصيلة أوسع .

وفى حالة المتغيرين المستقلين يتقارب جهدا الطبقتين الثنائية والبسيطة فى نقط المنحنى (انظر العلاقات (30) ، (29)) إذا كان هذان الجهدان يؤخذان على منحنيات ليابونوف المعرفة بشروط مشابهة للشروط ١ ــ ٣ التى تعرّف سطوح ليابونوف .

فقرة ٨ : انفصال جهد الطبقة الثنائية . نوضح أن جهد الطبقة الثنائية فى نقطة ما P_0 واقعة على السطح Σ تكون دالة منفصلة تتحقق لها العلاقتان

$$\left.\begin{aligned} W_i(P_0) &= W(P_0) + 2\pi\nu(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - 2\pi\nu(P_0), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

حيث $W_i(P_0)$ القيمة النهائية (the limiting value) لجهد الطبقة الثنائية عند الاقتراب إلى النقطة P_0 من الناحية الداخلية ، $W_e(P_0)$ القيمة النهائية عند الاقتراب إلى النقطة P_0 من الناحية الخارجية* .

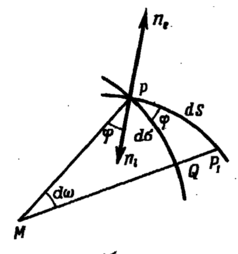
* إذا كان السطح Σ غير مغلق فإن الناحية الداخلية يمكن أن تعرف اصطلاحيا بالاتفاق على أى عمودى بالذات على السطح فى النقطة P_0 يعتبر «داخليا» وأى عمودى يعتبر «خارجيا» . ويجب الأخذ فى الاعتبار أنه فى حالة السطوح غير المغلقة يعرف جهد الطبقة الثنائية فقط للسطوح ذات الناحيتين .

وفى حالة المتغيرين المستقلين يكون للعلاقتين المناظرتين الصورة :

$$\left.\begin{aligned} W_i(P_0) &= W(P_0) + \pi\nu(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - \pi\nu(P_0). \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

وجهد الطبقة الثنائية للمتغيرين المستقلين يعبر عنه بالتكامل

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P.$$



شكل ٦٢

ندرس عنصرًا ما من عناصر طول القوس ds نهايتاه هما النقطتان P ، P_1 . نمد قوسًا دائريًا نصف قطره MP يمر بالنقطة P ومركزه فى النقطة M . حتى يتقاطع مع المستقيم MP_1 فى النقطة Q . عندئذ يمكننا كتابة ـ بدقة الكميات الصغيرة صغرًا لانهائيًا من الرتب العليا ـ أن (شكل ٦٢) :

$$ds\cos\varphi = d\sigma, \quad \frac{d\sigma}{R} = d\omega, \quad (40)$$

حيث $ds = \overset{\frown}{PP_1}$ $d\sigma = \overset{\frown}{PQ}$ ، $d\omega$ زاوية المشاهدة التى يرى بها القوس ds من النقطة M . وإشارة $d\omega$ تنطبق على إشارة $\cos\varphi$ بحيث إن : $d\omega > 0$ إذا كانت φ (الزاوية بين العمودى الداخلى فى النقطة P والمتجه $\overrightarrow{PM}$) أقل من $\pi/2$ و $d\omega < 0$ إذا كانت $\varphi > \pi/2$. وإذا كانت $d\omega > 0$ أى $\varphi < \pi/2$ فإن الناحية الداخلية للمنحنى M هى التى تشاهد من النقطة C ، وعندما $d\omega < 0$ $(\varphi > \pi/2)$ تشاهد من النقطة M الناحية الخارجية للمنحنى .

ومن هنا ينتج أن زاوية المشاهدة لقوس ما $\overset{\frown}{P_1P_2}$ تساوى الزاوية P_1MP_2 التى يرسمها الشعاع MP عندما تتحرك P على القوس P_1P_2 من P_1 إلى P_2 .

ندرس جهد الطبقة الثنائية W^0 على المنحنى المغلق C ذى الكثافة الثابة $\nu = \nu_0 = \text{const}$. والشعاع MP يرسم الزاوية :

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل المنحنى } C \\ \pi & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على المنحنى } C \\ 0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج المنحنى } C \end{cases}$$

عندما تتحرك النقطة P على كل المنحنى C . ومن هنا فللجهد W^0 نحصل على :

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 2\pi\nu_0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل المنحنى } C . \\ \pi\nu_0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على المنحنى } C . \\ 0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج المنحنى } C . \end{cases}$$

وبذلك فإن الجهد بالكثافة الثابتة يعتبر دالة متقطعة الثبات علمًا بأن

$$\left.\begin{aligned} W_i^0 &= W_c^0 + \pi\nu_0, \\ W_e^0 &= W_c^0 - \pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

حيث W_i^0 ، W_c^0 ، W_e^0 قيم الجهد داخل وعلى وخارج C .

وبالمثل فى حالة المتغيرات الثلاثة سنحصل على :

$$\frac{d\sigma \cos\varphi}{R^2} = d\omega, \tag{42}$$

حيث $d\omega$ الزاوية المجسمة التى يرى بها العنصر $d\sigma$ من عناصر السطح Σ . نفرض أن $d\sigma'$ عنصر السطح الكروى الناتج بتقاطع الكرة التى نصف قطرها MP المرسومة حول M مع المخروط الذى رأسه فى النقطة M والمرتكز على عنصر السطح $d\sigma$. وعنصر السطح $d\sigma' = d\sigma \cos\varphi$. ومن هنا تنتج العلاقة (42) . وتسرى الملاحظة الواردة أعلاه المتعلقة بإشارة $d\omega$ فتحتفظ بصحتها فى هذه الحالة أيضًا مما يؤدى إلى العلاقات :

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 4\pi\nu_0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع داخل السطح } \Sigma . \\ 2\pi\nu_0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع على السطح } \Sigma . \\ 0 & \text{إذا كانت النقطة } M \text{ تقع خارج السطح } \Sigma . \end{cases}$$

وهذه العلاقات تميز الدالة W^0 المتقطعة الثبات . وكذلك نتوصل إلى العلاقتين

$$\left.\begin{aligned} W_i^0 &= W_\Sigma^0 + 2\pi\nu_0, \\ W_e^0 &= W_\Sigma^0 - 2\pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \qquad (41')$$

حيث W_i^0 ، W_e^0 قيمتا الجهد W^0 داخل وخارج السطح Σ ، W_Σ^0 قيمة W^0 على Σ .

ندرس الآن جهد الطبقة الثنائية ذات الكثافة المتغيرة ونثبت أنه فى نقط اتصال الكثافة تتحقق علاقات مشابهة للعلاقات $(41')$ و (41).

نفرض أن P_0 نقطة من نقط السطح Σ حيث تكون فيها الدالة $\nu(P)$ متصلة . نأخذ جهد الطبقة الثنائية W^0 ذات الكثافة الثابتة $\nu_0 = \nu(P_0)$ وندرس الدالة

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \iint_\Sigma [\nu(P) - \nu_0] \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} d\sigma_P.$$

نثبت أن الدالة I متصلة فى النقطة P_0 . ولهذا الغرض يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل $I(M)$ فى النقطة P_0 . نضع أمامنا عدداً ما $0 < \varepsilon$. من اتصال الدالة $\nu(P)$ فى النقطة P_0 ينتج أنه لأى عدد معطى مسبقاً $0 < \eta$ يمكن تعيين Σ_1 ـ جوار للنقطة P_0 على السطح Σ ـ بحيث أن

$$|\nu(P) - \nu(P_0)| < \eta,$$

إذا كان $P \in \Sigma_1$. نعبر عن التكامل I فى صورة المجموع

$$I = I_1 + I_2,$$

حيث التكامل I_1 يؤخذ على السطح Σ_1 و I_2 يؤخذ على $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. من تعريف Σ_1 ينتج أن

$$|I_1| < \eta B_\Sigma,$$

حيث B_Σ ثابت يحدد بالشرط :

$$\iint_\Sigma \frac{|\cos\varphi|}{R_{MP}^2} d\sigma_P \leqslant B_\Sigma \qquad (43)$$

عند كل الأوضاع المحتملة للنقطة M ولا يعتمد على اختيار السطح Σ_1 . وسوف نورد تفاصيل أكثر حول هذا الثابت فيما بعد .

باختيار $\eta = \varepsilon / B_\Sigma$ نتأكد من أنه لأى عدد $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين Σ_1 الذى يحتوى P_0 بحيث يكون

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

لأى وضع للنقطة M . ومن هنا ينتج التقارب المنتظم للتكامل $I(M)$ فى النقطة P_0 وكذلك اتصاله فى هذه النقطة .

وإذا كان $W_i(P_0)$ و $W_e(P_0)$ نهايتى الجهد $W(M)$ عندما $M \to P_0$ من الناحيتين الداخلية والخارجية للسطح Σ ، فإن :

$$W_i(P_0) = W_i^0(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi\nu_0 = W(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$$

وبالمثل

$$W_e(P_0) = W(P_0) - 2\pi\nu(P_0).$$

وهكذا أثبتنا صحة العلاقتين (38) .

والإثبات الوارد أعلاه صحيح للسطوح التى تحقق شرط المحدودية (43) . وللسطح المحدب الذى لا يقطعه أى شعاع خارج من النقطة M أكثر من مرتين يكون $B_\Sigma \leqslant 8\pi$ ، وللسطوح المتكونة من عدد محدود من الأجزاء المحدبة يكون B_Σ محدودًا أيضًا . وبذلك فإن إثباتنا يتعلق بفصل واسع للغاية من السطوح .

وكل التحليلات المجراة فيما سبق تحتفظ بصحتها فى حالة المتغيرين المستقلين . وفى هذه الحالة تأخذ العلاقتان (41) الصورة :

$$W_i(P_0) = W(P_0) + \pi\nu(P_0),$$
$$W_e(P_0) = W(P_0) - \pi\nu(P_0).$$

فقرة ٩ : خواص جهد الطبقة البسيطة . إن جهد الطبقة البسيطة

$$V(M) = \iint_\Sigma \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P \qquad (26)$$

على خلاف جهد الطبقة الثنائية ، يكون متصلاً فى كل نقط السطح Σ . ولنتأكد من ذلك لحالة السطح الأملس Σ. ولهذا الغرض يكفى إثبات التقارب المنتظم للتكامل $V(M)$ فى نقط السطح Σ .

بالفعل ، نفرض أن P_0 نقطة ما من السطح Σ. ونعبر عن الجهد V فى صورة المجموع :

$$V = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

حيث Σ_1 جزء صغير بدرجة كافية من السطح Σ يحتويه سطح كروى نصف قطره δ ومركزه فى النقطة P_0 . وسنعرف المقدار δ بدقة أكثر فيما بعد .

ندرس مجموعة الإحداثيات التى نقطة أصلها فى النقطة P_0 والمحور z فيها يتجه فى اتجاه العمودى الخارجى عند P_0 . نفرض أن $M(x, y, z)$ نقطة اختيارية تبعد عن $P_0(0, 0, 0)$ بمسافة $MP_0 < \delta$. نرمز بالرمز Σ_1' إلى مسقط Σ_1 على المستوى (x, y) وبالرمز $K_{2\delta}^{M'}$ إلى الدائرة التى نصف قطرها 2δ ومركزها فى النقطة $M'(x, y, 0)$ والتى تحتوى كلية على المنطقة Σ_1' . وبفرض محدودية الدالة

$$|\mu(P)| < A$$

والأخذ فى الاعتبار أن

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

و

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geqslant \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

نحصل على :

$$|V_1(M)| < A \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A \iint_{\Sigma_1'} \frac{d\sigma'/\cos\gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2A \iint_{\Sigma_1'} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leqslant 2A \iint_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

إذا كان δ صغيرًا لدرجة أن $\cos\gamma > 1/2$.

ندرج فى المستوى (x, y) مجموعة الإحداثيات القطبية (ρ, φ) التى نقطة أصلها عند النقطة M' . عندئذ يمكننا أن نكتب :

$$|V_1(M)| < 2A \iint\limits_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2A \int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

وباختيار $\delta = \varepsilon/8\pi A$ سنحصل على :

$$|V_1(M)| < \varepsilon,$$

إذا كان $MP_0 < \delta$. وبالتالى فإن $V(M)$ يتقارب بانتظام فى أية نقطة $P_0 \in \Sigma$ ويعتبر دالة متصلة فى هذه النقطة .

ننتقل الآن إلى دراسة سلوك المشتقات العمودية لجهد الطبقة البسيطة على السطح . نبين أنه يكون لها على Σ انفصال من نفس نوع انفصال جهد الطبقة الثنائية .

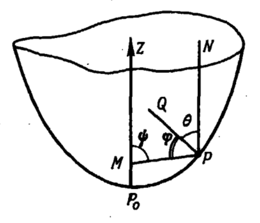
المشتقتان العمودية الخارجية والداخلية (بالعموديين الخارجى والداخلى) للدالة V وهما $\frac{dV}{dn_e}$ و $\frac{dV}{dn_i}$ تعينان كما يلى . نفرض أن P_0 نقطة ما على السطح Σ . من النقطة P_0 نمد المحود z الذى يمكن توجيهه إما فى اتجاه العمودى الخارجى أو فى اتجاه العمودى الداخلى .

ندرس المشتقة $\frac{dV}{dz}$ فى نقطة ما M على المحور z . نرمز بالرمزين $\left(\frac{dV}{dz}\right)_i$ ، $\left(\frac{dV}{dz}\right)_e$ إلى نهايتى المشتقة $\frac{dV}{dz}$ عندما تؤول النقطة M إلى النقطة P_0 من الناحية الداخلية أو الخارجية للسطح Σ . وإذا كان المحور z متجهًا فى اتجاه العمودى الخارجى (الداخلى) فإن هاتين القيمتين تسميان بالقيمتين النهائيتين الداخلية والخارجية للمشتقة بالعمودى الخارجى (الداخلى) فى النقطة P_0 * .

* نهاية النسبة الفرقية $\frac{V(M)-V(P_0)}{MP_0}$ عندما $M \to P_0$ تساوى النهاية من الخارج للمشتقة بالعمودى الخارجى أو النهاية من الداخل للمشتقة بالعمودى الداخلى وفقا للناحية التى تقترب منها النقطة M إلى النقطة P_0 .

نبحث انفصالات المشتقة العمودية الداخلية لجهد الطبقة البسيطة على Σ . المشتقة $\frac{dV}{dz}$ فى النقطة M على المحور z المتجه فى اتجاه العمودى الداخلى تساوى :

$$\frac{dV}{dz}(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2} \mu(P)\, d\sigma_P, \quad (44)$$



شكل ٦٣

حيث ψ الزاوية بين المحور z والمتجه $\overrightarrow{MP}$. نمد من النقطة P (شكل ٦٣) العمودى PQ والمستقيم PN الموازى للمحور z (العمودى فى النقطة P_0) ونرمز بالحرف θ إلى الزاوية NPQ المساوية للزاوية بين العمودين فى النقطتين P_0 ، P * . وصيغة جهد الطبقة الثنائية $W(M)$ تحتوى على المعامل $\frac{\cos\varphi}{R^2}$ حيث $\varphi = \angle MPQ$. وحيث إن الزاوية MPN تساوى $\pi - \psi$ فإن

$$\cos(\pi - \psi) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\Omega = -\cos\psi,$$

حيث Ω الزاوية الزوجية (زاوية المستويين dihedral angle) ذات الضلع PQ ** . ومن هنا ينتج أن

---

* من الواضح أن θ و $\sin\theta$ تؤولان إلى الصفر عندما $P \to P_0$. وإذا كان للسطح انحناء محدود فى جوار النقطة P_0 أى يمكن التعبير عن معادلته فى الصورة $z = f(x, y)$. حيث $f(x, y)$ لها مشتقات ثانية . فإن $\sin\theta$ تكون دالة قابلة للتفاضل بالمتغيرين x, y وبالتالى يكون

$$\sin\theta < Ar$$

(لسطوح ليابونوف $\sin\theta < Ar^{\delta}$) .

** إذا اعتبرنا اتجاه PQ هو محور مجموعة إحداثيات كروية جديدة فإن هذه العلاقة ستنطبق على العلاقة (13) صفحة ٣٨٤ .

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = -\iint_{\Sigma} (\mu \cos\theta) \frac{\cos\varphi}{R^2} d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu \sin\theta \cos\Omega \frac{\sin\varphi}{R^2} d\sigma = \\ = -W_1 - I(M), \quad (45)$$

حيث $W_1(M)$ ـ جهد الطبقة الثنائية ذات الكثافة $\mu_1 = \mu\cos\theta$. الذى له انفصال على السطح Σ . ومن الواضح أن التكامل $I(M)$ يعتبر دالة متصلة فى النقطة P_0 لأن $I(M)$ يتقارب بانتظام فى هذه النقطة .

وبالعودة إلى العلاقة (45) نرى أن

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_i &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0). \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

ندرج الرمز :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) = \\ = \left[-\iint_{\Sigma} (\mu\cos\theta) \frac{\cos\varphi}{R^2} d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu \sin\theta \cos\Omega \frac{\sin\varphi}{R^2} d\sigma\right]_{M=P_0} = \\ = \iint_{\Sigma} \mu \frac{\cos\psi_0}{R^2_{P_0P}} d\sigma,$$

حيث، ψ_0 الزاوية بين المحور z والمتجه $\overrightarrow{P_0P}$.

وبملاحظة أن $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$ نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

وذلك لأن المحور z يتجه وفقًا للفرض فى اتجاه العمودى الداخلى . وإذا اتجه المحور z فى اتجاه العمودى الخارجى فإن $\cos\psi$ يغير إشارته ونحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0). \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

ولحالة المتغيرين تكون صحيحة علاقات مماثلة مع تغيير 2π إلى π .

فقرة ١٠ : تطبيق الجهود السطحية لحل المسائل الحدية . تكفل طريقة فصل المتغيرات وطريقة دالة المصدر الحصول على صيغة صريحة لحل المسائل الحدية فقط فى حالة المناطق البسيطة الشكل . إن تحويل المسائل الحدية لمعادلة لابلاس (أو بواسون) بواسطة الجهود السطحية إلى معادلات تكاملية هو من ناحية يكون مناسبًا للبحث النظرى لمسألة قابلية حل ووحدانية المسائل الحدية ، ومن ناحية أخرى يعطى إمكانية الحل العددى الفعال للمسائل الحدية فى حالة المناطق ذات الشكل المعقد . ندرس المسائل الحدية الداخلية لمنحنى ما C :

عين الدالة u التوافقية فى المنطقة T المحدودة بالمنحنى C بحيث تحقق على C الشروط الحدية

$$u|_C = f \qquad \text{(المسألة الحدية الأولى)}$$

أو

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = f \qquad \text{(المسألة الحدية الثانية)} .$$

وبالمثل تصاغ المسائل الحدية الخارجية* .

سنبحث عن حل المسألة الحدية الداخلية الأولى فى صورة جهد الطبقة الثنائية

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P = -\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, ds_P.$$

عند أى اختيار للدالة $\nu(P)$ تحقق الدالة $W(M)$ معادلة لابلاس داخل C . والدالة $W(M)$ منفصلة على المنحنى C . ولتحقق الشرط الحدى من الواضح أنه يجب أن يكون

$$W_i(P_0) = f(P_0).$$

بالأخذ فى الاعتبار العلاقة (39) نحصل على معادلة لتعيين الدالة $\nu(P)$:

$$\pi\nu(P_0) + \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{P_0P}} \nu(P)\, ds_P = f(P_0). \qquad (49)$$

---

* فى صياغة المسألة الحدية الثانية سواء الداخلية أو الخارجية سنعتبر العمودى n فى الشروط الحدية داخليا.

وإذا رمزنا بالرمزين s , s_0 إلى قوسى المنحنى C المناظرين للنقطتين P , P_0 فإن المعادلة (49) يمكن كتابتها فى الصورة :

$$\pi \nu (s_0) + \int_0^L K(s_0, s) \nu (s)\, ds = f(s_0), \qquad (50)$$

حيث L طول المحيط C و

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_P}\left(\ln \frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}} \qquad (51)$$

نواة هذه المعادلة التكاملية التى تعتبر معادلة تكاملية من نمط معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثانى* . وللمسألة الخارجية تنتج معادلة مماثلة

$$-\pi \nu (s_0) + \int_0^L K(s_0, s) \nu (s)\, ds = f(s_0). \qquad (52)$$

وللمسألة الحيدية الثانية تنتج المعادلتان :

$$-\pi \mu (s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu (s)\, ds = f(s_0) \quad \text{(المسألة الداخلية)} \qquad (53)$$

$$\pi \mu (s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s) \mu (s)\, ds = f(s_0) \quad \text{(المسألة الخارجية)} \qquad (54)$$

حيث**

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln \frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos \psi_0}{R_{PP_0}} \qquad (55)$$

---

* المعادلات التكاملية التى تحتوى على تكاملات ذات حدود ثابتة تسمى معادلات فريدهولم :

من النوع الأول — $\int_a^b K(x, s) \varphi (s)\, ds = f(x)$

من النوع الثانى — $\varphi (x) + \int_a^b K(x, s) \varphi (s)\, ds = f(x)$

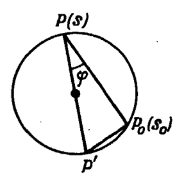
** لا يصعب ملاحظة أن $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$ ومثل هذه النوى تسمى مترافقة والمعادلات المناظرة لها تسمى بالمعادلات التكاملية المترافقة.

إذا كنا نبحث عن حلها فى صورة جهد الطبقة البسيطة :

$$u(M)=\int_C \ln\frac{1}{R_{MP}}\mu(P)\,ds_P.$$

والمسائل المتعلقة بقابلية هذه المعادلات للحل سندرسها فى فقرة ١١ من هذا البند .

ندرس المسائل الحدية لبعض المناطق البسيطة الشكل التى توجد لها معادلات تكاملية قابلة للحل بسهولة .



شكل ٦٤

١ ـ المسألة الحدية الأولى للدائرة . إذا كان المنحنى C عبارة عن دائرة نصف قطرها R فإن العمودى الداخلى فى النقطة P يتجه فى اتجاه القطر ويكون

$$\frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}}=\frac{1}{2R},$$

لأن φ هى الزاوية P_0PP' (شكل ٦٤) . والمعادلة التكاملية للدالة ν تأخذ الصورة :

$$\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\nu(s)\,ds=\frac{1}{\pi}f(s_0). \tag{56}$$

ولا يصعب التحقق من أن حلها هو الدالة

$$\nu(s)=\frac{1}{\pi}f(s)+A, \tag{57}$$

حيث A ثابت ما سنعينه فيما بعد . بالتعويض بالصورة المقترحة للحل فى المعادلة (56) نحصل على :

$$\frac{1}{\pi}f(s_0)+A+\frac{1}{\pi}\int_C \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\pi}f(s)+A\right)ds=\frac{1}{\pi}f(s_0),$$

ومن هنا نعين للثابت A صيغة بدلالة الدالة المعطاة :

$$A=-\frac{1}{4\pi^2R}\int_C f(s)\,ds.$$

وبذلك فإن

$$v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \tag{58}$$

هو حل المعادلة التكاملية (56) .

وجهد الطبقة الثنائية المناظر يساوى

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} v(P)\, ds_P = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \left[\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \right] ds.$$

نحول الطرف الأيمن للعلاقة السابقة بفرض أن M تقع داخل C :

$$W = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \right) \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \right) \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos\varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} \right) f(s)\, ds. \tag{59}$$

ومن المثلث $\triangle OPM$ (شكل ٦٥) يتضح أن

$$K = \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} = \frac{2R\cos\varphi - R_{MP}}{2RR_{MP}} = \frac{2RR_{MP}\cos\varphi - R_{MP}^2}{2RR_{MP}^2} =$$

$$= \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R\left[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)\right]}, \tag{60}$$

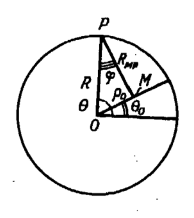
وذلك لأن

$$\rho_0^2 = R^2 + R_{MP}^2 - 2RR_{MP}\cos\varphi.$$

بالتعويض بالصيغة (60) الناتجة للنواة K فى العلاقة (59) نحصل على تكامل بواسون

$$u = W(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2) f(\theta)\, d\theta}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}, \tag{61}$$

الذى يعطى حل المسألة الحدية الأولى للدائرة .



شكل ٦٥

والتحليلات الواردة فى هذه الفقرة توضح أنه بأية دالة متصلة f تعرف العلاقة (61) دالة توافقية تؤول باتصال إلى القيم الحدية لـ f .

وإذا كانت الدالة f دالة متقطعة الاتصال فإنه وفقاً لخاصية جهد الطبقة الثنائية تكون الدالة W أيضًا متصلة فى جميع نقط اتصال f . ومن محدودية الدالة f ،

$$|f| < C$$

تنتج محدودية الدالة (61) :

$$|W(\rho_0, \theta_0)| < C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = C,$$

وذلك لأن*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = 1. \qquad (62)$$

٢ ـ المسألة الحدية الأولى لنصف الفراغ . عين الدالة التوافقية المتصلة فى كل مكان فى المنطقة $z \geqslant 0$ والتى تأخذ على الحدود $z = 0$ القيمة المعطاة $f(x, y)$.

سنبحث عن حل هذه المسألة فى صورة جهد الطبقة الثنائية

$$W(x, y, z) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi}{R^2} \nu(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2.$$

وفى هذه الحالة يكون

$$\frac{\cos\varphi}{R^2} = \frac{z}{R^3} \frac{z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

* تنتج المتساوية (62) من أن الطرف الأيسر هو عبارة عن حل المسألة الحدية الأولى عندما $f = 1$

ونواة المعادلة التكاملية

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{R^2}\right)_{z=0}=0.$$

وبذلك فإن كثافة جهد الطبقة الثنائية هى

$$\nu(P)=\frac{1}{2\pi}f(P)$$

والدالة المطلوب تعيينها تساوى

$$u(x, y, z)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

ولا يصعب توضيح أن $u(x, y, z)$ تؤول بانتظام إلى الصفر عندما $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$ إذا كانت الدالة f تتمتع بهذه الخاصية.

فقرة ١١ : المعادلات التكاملية المناظرة للمسائل الحدية. عند حل المسائل الحدية لمعادلة لابلاس بواسطة جهدى الطبقتين البسيطة والثنائية توصلنا إلى معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثانى (50).

وشروط قابلية حل معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثانى ذات النواة المتصلة والطرف الأيمن المحدود (القابل للتكامل) مشابهة لشروط قابلية حل مجموعات المعادلات الجبرية الخطية (التى تؤول إليها المعادلات التكاملية إذا ما استبدل التكامل بالمجموع التكاملى). وتنحصر نظرية فريدهولم الأولى فيما يلى :

المعادلة التكاميلة اللامتجانسة من النوع الثانى لها حل وحل وحيد إذا كان للمعادلة المتجانسة المناظرة حل صفرى فقط*.

* تكون نظرية فريدهولم للمنحنيات ذات الانحناء المحدود قابلة للتطبيق مباشرة لأن نواة المعادلة التكاملية (50) تكون متصلة.

ونظرية فريدهولم قابلة للتطبيق أيضا عندما تكون متصلة إحدى النوى المكررة (الثنائية)

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2)=\int\int_{\Sigma}K^{(1)}(P_1, M)\,K^{(n)}(M, P_2)\,d\sigma_M,\qquad K^{(1)}(P, M)=K(P, M).$$

ثبت أنه اذا كان Σ سطح ليابنونوف فإن النوى المكررة لمعادلتنا تكون ابتداء من رقم معين

نثبت اعتمادًا على النظرية المصاغة أن المعادلة التكاملية (50) لها حل وحيد.

نكتفى بدراسة المنحنيات المحدبة التى لا تحتوى على أجزاء مستقيمة من الحدود.

متصلة . وكما رأينا تتحقق لسطوح ليابونوف المتباينة

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\delta}}.$$

ويمكن التعبير عن النوى المكررة فى الصورة

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \iint_{\Sigma} K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, d\sigma_M.$$

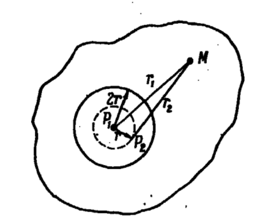
نوضح أنه إذا كان $(r_i = P_iM;\ \alpha_i > 0;\ i = 1, 2)$ $|K_i| < \frac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}$ ، فإن

$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}$ إذا كان $r = P_1P_2$ ، $\alpha_1 + \alpha_2 < 2$.

ومن الواضح أنه يكفى إثبات هذا التقدير لتلك الحالة عندما تكون النقطة P_2 واقعة فى جوار ليابونوف Σ_0 للنقطة P_1 علما بأنه بدلا من التكامل على Σ_0 يمكن دراسة التكامل على المسقط S_0 لهذا الجوار على المستوى المماس فى النقطة P_1 وذلك وفقا لأن

$$1 \geqslant \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} \geqslant B > 0$$

(حيث $\rho(P, M)$ البعد بين مسقطى النقطتين M ، P على المستوى المماس . B ثابت ما) . وكذلك وفقا للعلاقة بين عنصر السطح $d\sigma$ ومسقطه dS : $d\sigma = dS/\cos\gamma$. حيث تبعا للعلاقة (34) $\cos\gamma > 1/2$.



شكل ٦٦

للمنطقة المستوية تكون صحيحة المأخوذة التالية : إذا كان $|K_i| < \frac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}$ فإن

$$|I| = \left|\iint_{S_0} K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, dx\, dy\right| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

نرمز بالحرف R إلى قطر المنطقة S_0 . نقسم التكامل I إلى تكاملين : I_1 المأخوذ على الدائرة G_1 التى نصف قطرها $2r$ ومركزها فى النقطة P_1 و I_2 المأخوذ على المنطقة الباقية G_2 (شكل ٦٦) . وحيث إنه للنقط

وفى هذه الحالة تكون نواة المعادلة (50) : $K(P_0, P)$ غير سالبة لأن

$$K(P_0, P)\, ds_P = d\omega,$$

حيث $d\omega$ هى زاوية مشاهدة القوس dS_P من النقطة P_0 .

ندرس قبل أى شىء المسألة الحدية الأولى للمنطقة الداخلية . المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (50) تكون على الصورة :

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\, \nu(s)\, ds = 0. \tag{63}$$

M الواقعة فى G_2 يكون

$$2 \geqslant \frac{r_1}{r_2} \geqslant \frac{2}{3} \quad \left(\begin{matrix} r_1 \leqslant r_2 + r \leqslant 2r_2, \\ r_2 \leqslant r_1 + r \leqslant r_1 + \frac{r_1}{2} = \frac{3r_1}{2} \end{matrix} \right),$$

فإننا نحصل للتكامل I_2 على التقدير

$$|I_2| < 4C_1C_2 \left| \int_0^{2\pi} \int_{2r}^{R} \frac{1}{r_1^{4-\alpha_1-\alpha_2}} r_1\, dr_1\, d\varphi \right| < \begin{cases} \dfrac{C_3}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1 + \alpha_2 < 2, \\ C_3 R^{\alpha_1+\alpha_2-1}, & \alpha_1 + \alpha_2 > 2. \end{cases}$$

وبإجراء التعويض بالمتغيرات $x = rx', \ y = ry'$ فى التكامل المأخوذ على G_1 نحصل على :

$$|I_1| < \left| \frac{1}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}} \iint_{G_1'} \frac{C_1C_2}{r_1'^{2-\alpha_1} r_2'^{2-\alpha_2}}\, dx'\, dy' \right|.$$

وفى التكامل الأخير المأخوذ على الدائرة G_1' التى نصف قطرها $2r$ يكون r_1' هو البعد عن المركز . r_2' هو البعد عن منتصف نصف القطر . ومن ثم فإن هذا التكامل يتقارب علما بأنه لا يعتمد على موضع النقطة P_2 أى على r . ومن هنا

$$|I_1| < \frac{C_4}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

بوضع $C_3 + C_4 = C$ نحصل على المتباينة المطلوبة

$$|I| < \begin{cases} \dfrac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1 + \alpha_2 < 2, \\ CR^{\alpha_1+\alpha_2-2}, & \alpha_1 + \alpha_2 > 2. \end{cases}$$

ومن هنا ينتج أنه ابتداء من رقم معين تكون التكاملات المكونة للنوى المكررة محدودة وتتقارب بانتظام أى تعتبر دوال متصلة فى متغيراتها .

وكما رأينا (انظر فقرة ٨) ، تتحقق المتساوية

$$\int_0^L K(s_0, s)\, ds = \pi,$$

التى يمكن بالاستعانة بها كتابة المعادلة المتجانسة (63) فى الصورة :

$$\int_0^L [\nu(s_0) + \nu(s)]\, K(s_0, s)\, ds = 0. \qquad (64)$$

نفرض أن $P_0^*(s_0^*)$ نقطة على المحيط C تصل عندها الدالة $|\nu(s)|$ إلى قيمتها العظمى . ومن هنا ينتج أن المجموع $\nu(s_0^*) + \nu(s)$ يحتفظ بإشارة ثابتة . وعندئذ بوضع $s_0 = s_0^*$ فى (64) والاستعانة بأن $K(s_0, s) \geqslant 0$ نحصل على المتساوية

$$\nu(s_0^*) + \nu(s) = 0$$

أو

$$\nu(s) = -\nu(s_0^*),$$

التى تتناقض مع الاتصال فى النقطة s_0^* إذا كان فقط $\nu(s_0^*) \neq 0$.

وبالتالى فالمعادلة المتجانسة (63) يكون لها حل صفرى فقط . وبذلك فالمعادلة اللامتجانسة يكون لها حل وحيد عند أية دالة f * .

والمسألة الحدية الثانية الخارجية كما رأينا (انظر فقرة ١٠) تؤول إلى المعادلة التكاملية

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\, \mu(s)\, ds = f(s_0), \qquad (54)$$

التى تكون نواتها $K_1(s_0, s)$ مترافقة مع النواة $K(s_0, s)$ أى أن $K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$.

ونظرية فريدهولم الثانية تنحصر فيما يلى :

---

* عند وجود أجزاء مستقيمة فى الحدود تصعب التحليلات بعض الشىء إلا أن توصيلها إلى النهاية لا يشكل أية صعوبة .

عدد الحلول المستقلة خطيًّا لمعادلة تكاملية متجانسة ما يساوى عدد الحلول المستقلة خطيا للمعادلة المترافقة معها .

وينتج من هذه النظرية أن حل المعادلة (54) محدد تحديدا أحادى القيمة .

والمسألة الحدية الأولى الخارجية تناظرها المعادلة

$$-\pi\nu(s_0)+\int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds=f(s_0). \qquad (52)$$

والمعادلة المتجانسة $(f=0)$ وفقًا لما سبق يمكن أن تؤول إلى الصورة :

$$\int_0^L [\nu(s_0)-\nu(s)]\,K(s_0, s)\,ds=0. \qquad (65)$$

نرمز بالرمز s_0^* إلى النقطة التى فيها $|\nu(s)|$ تصل إلى قيمتها العظمى فنحصل من (65) على :

$$\nu(s^*)=\nu(s).$$

ومن هنا ينتج أنه فقط يكون

$$\nu(s)=\text{const}=\nu_0$$

هو حل المعادلة المتجانسة . ووفقًا لنظرية فريدهولم الثانية يكون للمعادلة المتجانسة المترافقة حل وحيد .

وشرط قابلية حل المعادلة اللامتجانسة تعطيه نظرية فريدهولم الثالثة :

إذا كان لمعادلة تكاملية متجانسة ما

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

k من الحلول المستقلة خطيًّا $\varphi_i(x)\ (i=1, 2, \ldots, k)$ فإن المعادلة اللامتجانسة المترافقة معها

$$\psi(x)=\int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds+f(x)$$

يكون لها حل إذا كان $\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx=0$ ، $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$

وبتطبيق نظرية فريدهولم الثالثة على المعادلة (53) المناظرة للمسألة الحدية الثانية الداخلية نحصل على شرط قابلية حل هذه المسألة :

$$\int_0^L f(s)\,ds=0, \tag{66}$$

الذى سبق أن قابلناه فى بند ١ .

وشرط قابلية حل المسألة الحدية الأولى الخارجية يكون على الصورة :

$$\int_0^L f(s)\,h(s)\,ds=0, \tag{67}$$

حيث $h(s)$ حل المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (53) . ولا يصعب توضيح المعنى الفيزيائى لهذه الدالة .

نفرض أن موصلاً أسطوانيًّا مقطعه هو الشكل S ، مشحون حتى جهد معين V_0 . وفى الموصل توجد كل الشحنة على السطح . نرمز بالرمز $\bar{h}(s)$ إلى كثافة الشحنات السطحية . والجهد المكون بهذه الشحنات السطحية يعتبر جهدًا للطبقة البسيطة ذات الكثافة $\bar{h}(s)$ ، ويعبر عنه بالعلاقة (29) . والمشتقات العمودية له من الداخل تساوى الصفر وذلك لأن داخل الموصل يكون $V=\text{const}$. ولذا فإن الدالة $\bar{h}(s)$ تحقق المعادلة المتجانسة (53) وتتناسب مع الدالة $h(s)$ المعرفة فيما سبق ، وهو ما يوضح المعنى الفيزيائى لهذه الدالة .

وبذلك فإن المعادلات التكاملية التى تؤول إليها المسائل الحدية تكون دائمًا قابلة للحل للمسألة الحدية الأولى الداخلية وللمسألة الحدية الثانية الخارجية وقابلة للحل بالشرطين (67) . (66) للمسألة الحدية الثانية الداخلية وللمسألة الحدية الأولى الخارجية .

مسائل على الباب الرابع

١ ـ عين الدالة u التوافقية داخل دائرة نصف قطرها a والتى تأخذ على محيطها C القيم :

أ) $u|_C = A\cos\varphi$ ؛ (ب) $u|_C = A + B\sin\varphi$.

٢ ـ حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ داخل المستطيل $0 \leqslant y \leqslant b$ ، $0 \leqslant x \leqslant a$ بالشروط الحدية

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{y=0} = f_2(x), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

أثبت أن العلاقة الناتجة عند ذلك تعطى حل المسألة لأية دالة متقطعة الاتصال معطاة على الحدود .

حل المسألة فى الحالة الخاصة :

$$f_1(y) = Ay(b-y), \quad f_2(x) = B\cos\frac{\pi}{2a}x, \quad f_3 = f_4 = 0.$$

٣ ـ حل المعادلة $\Delta u = 1$ للدائرة نصف قطرها a بالشرط الحدى $u|_{r=a} = 0$.

٤ ـ حل المعادلة $\Delta u = Axy$ لدائرة نصف قطرها a ومركزها فى النقطة $(0,0)$ بالشرط الحدى $u|_{r=a} = 0$.

٥ ـ حل المعادلة $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ فى الحلقة $a \leqslant \rho \leqslant b$. إذا كان

$$u|_{\rho=a} = A_1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0.$$

نقطة الأصل توجد فى مركز الحلقة .

٦ ـ كوّن دالة المصدر لمعادلة لابلاس (المسألة الحدية الأولى) :

(ا) لنصف دائرة . (ب) لحلقة . (جـ) للطبقة $(0 \leqslant z \leqslant l)$.

٧ ـ عين الدالة التوافقية داخل الحلقة $a \leqslant \rho \leqslant b$ والتى تحقق الشروط الحدية التالية :

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

٨ ـ عين حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ فى نصف المستوى $y \geqslant 0$ بالشروط الحدية

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ u_0 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

٩ ـ عين الدالة $u(\rho,\varphi)$ التوافقية داخل القطاع الدائرى $\rho \leqslant a$ ، $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ بالشروط الحدية :

$$u|_{\varphi=0}=q_1,\quad u|_{\varphi=\varphi_0}=q_1,\quad u|_{\rho=a}=q_2,$$ (أ)

حيث q_2 ، q_1 ثابتان ؛

$$u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\varphi_0}=0,\quad u|_{\rho=a}=f(\varphi).$$ (ب)

١٠ ـ بطريقة الفروق المحدودة حل المسألة الحدية الأولى للمعادلة $\Delta u=0$ داخل المستطيل $0\leqslant y\leqslant b$ ، $0\leqslant x\leqslant a$ بتقسيم كل ضلع من أضلاعه إلى ثمانية أجزاء متساوية إذا كانت الشروط الحدية على الصورة :

$$u|_{x=0}=\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad u|_{y=b}=\frac{x}{a}\sin\frac{\pi}{a}x,\quad u|_{x=a}=u|_{y=0}=0.$$

قارن مع الحل التحليلى (انظر الكتاب الثانى ، الباب الرابع ، بند ٣) .

١١ ـ عين الجهد الحجمى للكرة عند ثبات الكثافة $\rho=\rho_0$.

إرشاد : حل المعادلة $\Delta u=0$ خارج الكرة والمعادلة $\Delta u=4\pi\rho_0$ داخل الكرة وحقق شروط الترافق للحل على سطح الكرة .

١٢ ـ عين جهد الطبقة البسيطة الموزعة بكثافة ثابتة $\nu=\nu_0$ على سطح كرة .

إرشاد : ابحث عن حل المعادلة $\Delta u=0$ خارج وداخل الكرة واستعن لترافق الحل بشروط انفصال مشتقة جهد الطبقة البسيطة .

١٣ ـ حل المسألة الحدية الأولى للأسطوانة الدائرية المحدودة $(\rho\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant l)$:

(أ) على قاعدتى الأسطوانة معطاة شروط حدية صفرية (من النوع الأول أو الثانى) . وعلى السطح الجانبى $u|_{\rho=a}=f(z)$ ؛

(ب) على السطح الجانبى وعلى إحدى قاعدتى الأسطوانة معطاة شروط حدية صفرية (من النوع الأول والثانى) وعلى القاعدة الأخرى للأسطوانة $u=f(\rho)$ ، على سبيل المثال $f(\rho)=A\rho\left(1-\frac{\rho}{a}\right)$.

١٤ ـ حل المعادلة اللامتجانسة

$$\Delta u=-f$$

فى المنطقة الأسطوانية اللامحدودة بالشروط الحدية الصفرية (من النوع الأول أو الثانى) وكوّن دالة المصدر .

١٥ ـ عين الدالة التوافقية داخل الكرة ، المساوية u_1 على إحدى نصفى السطح الكروى و u_2 على النصف الثانى .

١٦ ـ اكتب المفكوك بالدوال الكروية لكثافة الشحنات السطحية المستحثة على كرة موصلة بشحنة نقطية .

١٧ ـ حل مسألة استقطاب كرة عازلة كهربائيًا فى مجال الشحنة النقطية .

١٨ ـ احسب جهد الجاذبية لقرص مستو . قارن مع التمثيل التقاربى لجهد الجاذبية على مسافات كبيرة

١٩ ـ احسب الجهد المغناطيسى لتيار دائرى .

٢٠ ـ حل مسألة اضطراب مجال كهربائى مستو مواز بكرة موصلة توصيلاً مثاليًا . حل المسألة لكرة غير موصلة مطلقًا .

ملاحق الباب الرابع

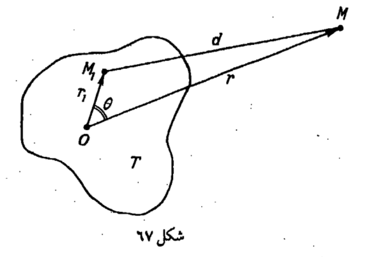
ملحق ١ ـ الصيغة التقاربية للجهد الحجمى

عند دراسة الجهد الحجمى

$$V(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)\, d\tau_P}{d}, \qquad d = R_{MP} \tag{1}$$

على مسافات بعيدة عن الجسم عادة تؤخذ قيم الجهد المساوية m/R، حيث m كتلة الجسم T ، R بعد مركز ثقله عن نقطة الملاحظة . لنثبت صيغة تقاربية أكثر دقة للجهد V .

نفرض أن Σ سطح كروى مركزه فى نقطة الأصل ، يحتوى كلية الجسم T . وخارج هذا السطح الكروى يكون الجهد دالة توافقية .



شكل ٦٧

وبعد نقطة الملاحظة $M(x, y, z)$ عن النقطة المتغيرة داخل الجسم $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (شكل ٦٧) التى يتم بالنسبة إليها التكامل يساوى

$$d = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta} \qquad (r = OM,\ r_1 = OM_1), \tag{2}$$

ومن هنا

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\mu}}; \quad \alpha=r_1/r; \quad \mu=\cos\theta. \qquad (3)$$

وحيث إن $r_1 < r$ فإن $\alpha < 1$ ولذا يكون صحيحاً المفكوك (انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ٢ ، بند ١)

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu), \qquad (4)$$

حيث $P_n(\mu)$ كثيرة حدود ليجاندر من الرتبة n (النونية) . بالتعويض بهذه الصيغة فى العلاقة (1) والأخذ فى الاعتبار أن $1/r$ لا تعتمد على متغيرات التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{r}\iiint_T \rho \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu)\,d\tau = V_1+V_2+V_3+\ldots = \\ &= \frac{1}{r}\iiint_T \rho\,d\tau + \frac{1}{r^2}\iiint_T \rho r_1 P_1(\mu)\,d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{r^3}\iiint_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\,d\tau + \ldots \end{aligned} \qquad (5)$$

والحد الأول يساوى m/r حيث m كتلة كل الجسم . ويعطينا التقريب الأول لحساب الجهد لقيم r الكبيرة .

ننتقل إلى حساب الحدود الأخرى للمفكوك (5) . الدالة المكاملة فى الحد الثانى تساوى

$$\rho P_1(\mu)\,r_1=\rho\mu r_1=\rho r_1\cos\theta=\frac{\rho x x_1+\rho y y_1+\rho z z_1}{r}.$$

والمقادير x, y, z, r لا تعتمد على متغيرات التكامل ويمكن إخراجها خارج علامة التكامل . وبعد ذلك يأخذ الحد الثانى لمفكوك الجهد الصورة التالية :

$$\frac{1}{r^2}\iiint_T \rho r_1 P_1(\mu)\,d\tau=\frac{1}{r^3}(M_1x+M_2y+M_3z)=\frac{M}{r^3}(x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z}),$$

حيث

$$M_1 = \iiint_T \rho x_1\, d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \iiint_T \rho y_1\, d\tau = M\bar{y};$$

$$M_3 = \iiint_T \rho z_1\, d\tau = M\bar{z}$$

هى العزوم الأولى . $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ إحداثيات مركز الثقل . وبذلك يتناقص الحد الثانى مثل $1/r^2$. وإذا أخذنا نقطة الأصل فى مركز الثقل $(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = 0)$ فإن $V_2 = 0$.

ندرس الحد الثالث للمفكوك . نحول الصيغة المكاملة

$$\rho r_1^2 P_2(\mu) = \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 - r_1^2 r^2}{2r_1^2 r^2} =$$
$$= \frac{\rho}{2r^2}\left[3(x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 - r_1^2 r^2\right].$$

وبالاصطلاح على الرمز التالى :

$$M_{ik} = \iiint_T \rho x_i x_k\, d\tau \quad (x = x_1;\ y = x_2;\ z = x_3),$$

نصل إلى الصيغة التالية للحد الثالث V_3 :

$$V_3 = \frac{1}{r^3} \iiint_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2r^5}\{x^2[3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$
$$+ y^2[3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + z^2[3M_{33} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$
$$+ 2\cdot 3xyM_{12} + 2\cdot 3xzM_{13} + 2\cdot 3yzM_{23}\}.$$

وكثيرة الحدود بين القوسين الخارجيين تعتبر كثيرة حدود توافقية وذلك لأنه يمكن كتابتها فى الصورة :

$$V_3 = \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)[M_{11} - M_{22}] - (z^2 - x^2)[M_{11} - M_{33}] +$$
$$+ (y^2 - z^2)[M_{22} - M_{33}] + 6[xyM_{12} + xzM_{13} + yzM_{23}]\},$$

حيث يحقق كل حد معادلة لابلاس . والمعاملات داخل الأقواس المربعة تصاغ بدلالة عزوم القصور الذاتى . إن عزم القصور الذاتى للجسم T بالنسبة إلى المحور x يساوى كما نعلم :

$$A = \iiint_T \rho (y_1^2 + z_1^2)\, d\tau = M_{22} + M_{33}.$$

وبالمثل عزما القصور الذاتى بالنسبة إلى المحورين z ، y يساويان :

$$B = M_{33} + M_{11}; \quad C = M_{11} + M_{22}.$$

ومن هنا ينتج أن

$$M_{11} - M_{22} = B - A; \quad M_{11} - M_{33} = C - A; \quad M_{22} - M_{33} = C - B.$$

ونتيجة لذلك نصل إلى الصيغة التقاربية للجهد

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{m}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) + 6(xyM_{12} + yzM_{23} + zxM_{31})\}, \qquad (6)$$

الصحيحة بدقة حتى الحدود من الرتبة $1/r^6$.

وتبسط الصيغة (6) إذا اخترنا نقطة الأصل فى مركز الثقل ومددنا محاور الإحداثيات فى اتجاه محاور القصور الرئيسية :

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C)\}. \qquad (7)$$

والتمثيل التقاربى للجهد الذى حصلنا عليه يكفل الإجابة على عديد من الأسئلة المتعلقة بالمسألة العكسية لنظرية الجهد والمنحصرة فى تعيين مميزات الجسم وفقًا لجهده (أو بأية مشتقة من مشتقاته) .

بالفعل فبتعيين معاملات المفكوك (6) يمكن تعيين الكتلة وإحداثيات مركز الثقل وعزوم القصور للجسم .

ملحق ٢ ـ مسائل الكهروستاتيكا

فى مسائل الكهروستاتيكا يؤول حل معادلات ماكسويل إلى البحث عن دالة مقياسية (scalar) ـ ألا وهى الجهد φ ـ ترتبط بشدة المجال بالعلاقة

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi .$$

بالاستعانة بمعادلة ماكسويل

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -4\pi\rho,$$

نحصل على

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

وبذلك يحقق الجهد معادلة بواسون فى نقط الفراغ حيث توجد الشحنات الكهروستاتيكية ويحقق معادلة لابلاس فى النقط حيث لا توجد شحنات .

١ ـ المسألة الأساسية فى الكهروستاتيكا هى مسألة البحث عن المجال الناشئ بمجموعة شحنات على الموصلات المعطاة . وعند ذلك هناك صياغتان محتملتان لهذه المسألة :

(أ) تعطى جهود الموصلات ويطلب تعيين المجال خارج الموصلات وكثافة الشحنات على الموصلات . وتنحصر الصياغة الرياضية للمسألة فيما يلى :

المطلوب تعيين الدالة φ التى تحقق معادلة لابلاس $\Delta\varphi = 0$ فى كل مكان خارج مجموعة الموصلات المعطاة وتؤول إلى الصفر فى اللانهاية وتأخذ القيم المعطاة φ_i على سطوح الموصلات S_i :

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i, \qquad \varphi_i = \text{const}.$$

وبذلك نصل فى هذه الحالة إلى المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس . وتنتج وحدانية حلها من النظرية العامة .

(ب) الصياغة العكسية للمسألة محتملة أيضًا . على الموصلات تعطى شحنات كاملة . والمطلوب تعيين جهود الموصلات وتوزيع الشحنات على سطوح الموصلات والمجال خارجها . وحل هذه المسألة يؤول إلى البحث عن الدالة φ التى تحقق معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi = 0$$

خارج مجموعة الموصلات المعطاة وتؤول إلى الصفر فى اللانهاية وتأخذ على سطوح الموصلات قيمًا ثابتة ما معطاة :

$$\varphi |_{S_i} = \text{const}$$

وتحقق العلاقة التكاملية على سطوح الموصلات

$$\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_i,$$

حيث e_i الشحنة الكاملة للموصل رقم i .

٢ ــ وحدانية حل المسألة الحدية الثانية لا تنتج من النظرية العامة - ولكن يمكن إثباتها بسهولة .

نفرض أنه يوجد حلان φ_2 . φ_1 للمسألة (ب). عندئذ يحقق الفرق بينهما

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

المعادلة

$$\Delta\varphi' = 0$$

والشروط

$$\varphi' |_{S_i} = \text{const}, \qquad \oint_{S_i} \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma = 0, \qquad \varphi' |_{\infty} = 0.$$

نحصر كل الموصلات المعطاة داخل السطح الكروى Σ_R ذى نصف القطر الكبير بدرجة كافية R ونطبق على الدالة φ' علاقة جرين الأولى فى المنطقة T_R . والمحدودة بالسطح الكروى Σ_R وسطوح الموصلات S_i :

$$\int_{T_R} (\nabla\varphi')^2 d\tau = \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma.$$

وتبعًا للشروط فى اللانهاية* وعلى السطوح نحصل على :

---

* من الشرط $\varphi'|_{\infty} = 0$ ينتج انتظام (regularity) الدالة φ' فى اللانهاية (انظر صفحة ٣٥٥) . ووفقا لذلك يكون

$$\int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} d\sigma \to 0 \quad \text{عندما} \quad R \to \infty$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{T_R}(\nabla\varphi')^2\,d\tau=0,$$

ومن هنا ونظرًا لأن الصيغة المكاملة غير سالبة ينتج أن

$$\varphi'=\text{const} \quad \text{أو} \quad \nabla\varphi'=0$$

فى كل مكان فى المنطقة محل الدراسة . وبأخذ الشرط فى اللانهاية $\varphi'|_\infty=0$ فى الاعتبار نحصل على :

$$\varphi'=0,$$

مما يثبت وحدانية المسألة المصاغة .

٣ ـ من وحدانية حل المسألة الحدية لمعادلة لابلاس ينتج أن جهد الموصل الواحد على انفراد يتناسب طرديًا مع الشحنة المكتسبة :

$$\frac{e}{\varphi}=C.$$

بالفعل ، إذا وضعنا على موصل واحد الشحنتين e ، $e'=me$ فإن الجهدين المناظرين φ ، φ' يجب أن يحققا المعادلتين

$$\Delta\varphi=0; \quad \Delta\varphi'=0$$

والشروط الحدية

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma=e; \quad -\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma=me,$$

ومن هنا ينتج أن $\varphi'-m\varphi=0$ أى أن $\frac{\varphi'}{\varphi}=\frac{e'}{e}$.

وعلى سطح الموصل الواحد المنفرد نحصل على :

$$\frac{e'}{\varphi'}=\frac{e}{\varphi}=C=\text{const}.$$

وهذا الثابت C يسمى بسعة الموصل المنفرد ، وهى لا تعتمد على شحنة الموصل ، وإنما تتحدد بشكل ومقاييس هذا الموصل . وبذلك فللموصل المنفرد تتحقق العلاقة

$$e = C\varphi, \quad C = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma.$$

وسعة الموصل المنفرد تساوى عدديًّا الشحنة التى عند إكسابها للموصل يكتسب الموصل جهدًا يساوى الواحد الصحيح . وإذا لم يكن الموصل منفردًا فإن جهده يعتمد اعتمادًا جوهريًّا على أشكال ومواقع الموصلات الأخرى . ولمجموعة الموصلات تتحقق العلاقات :

$$\begin{aligned}
e_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1),\\
e_2 &= C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
e_n &= C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \ldots + C_{nn}\varphi_n,
\end{aligned}$$

حيث φ_i , e_i شحنة وجهد الموصل رقم i . والمقدار C_{ik} له معنى السعة المتبادلة للموصل رقم i بالنسبة إلى الموصل رقم k . وهى يمكن تعريفها بوصفها تلك الشحنة التى يجب إكسابها للموصل رقم i لكى يكون لكل الموصلات فيما عدا الموصل رقم k جهد صفرى ، أما الموصل رقم k فيكون له جهد يساوى الواحد الصحيح .

٤ ـ من السهل أن نبين أن مصفوفة المعادلات C_{ik} تكون مصفوفة متماثلة أى تتحقق العلاقة

$$C_{ik} = C_{ki}.$$

وللتحديد ندرس حالة الموصلين رغم أنه فى حالة الموصلات التى عددها n يظل الإثبات كما هو .

نفرض أنه معطى موصلان b , a . عندئذ يؤول تحديد المعاملين C_{ba} , C_{ab} إلى تعيين الدالتين $u^{(2)}$, $u^{(1)}$ اللتين تحققان المعادلتين $\Delta u^{(2)} = 0$, $\Delta u^{(1)} = 0$ والشروط الحدية :

$$u^{(1)}|_{S_a} = 0; \quad u^{(1)}|_{S_b} = 1; \quad u^{(1)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\,d\sigma = e_a^{(1)} = C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a}=1;\quad u^{(2)}|_{S_b}=0;\quad u^{(2)}|_{\infty}=0,$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_b}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}d\sigma=e_b^{(2)}=C_{ba}.$$

نرسم سطحًا كرويًّا نصف قطره R كبير بدرجة كافية ويحتوى هذا السطح الكروى الموصلين a , b. ونطبق علاقة جرين على الدالتين $u^{(2)}$, $u^{(1)}$ فى المنطقة بين السطح Σ_R وسطحى الوصلين S_b , S_a :

$$\int_{T_R}(u^{(1)}\Delta u^{(2)}-u^{(2)}\Delta u^{(1)})\,d\tau=\int_{\Sigma_R+S_a+S_b}\left(u^{(1)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}-u^{(2)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\right)d\sigma.$$

والتكامل فى الطرف الأيسر لهذه المتساوية يساوى الصفر . بالاستعانة بالشروط الحدية والشروط على اللالانهاية نحصل على :

$$\int_{S_b}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}d\sigma-\int_{S_a}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}d\sigma=0$$

أو

$$C_{ab}=C_{ba},$$

وهو المطلوب إثباته .

٥ ـ ننتقل إلى أمثلة محددة .

ندرس مسألة مجال الكرة المشحونة . نفرض أنه أعطى على سطح كرة موصلة نصف قطرها a الجهد φ_0 . وبحل المسألة (أ) يسهل توضيح أن مجال وكثافة الشحنات على سطح الكرة فى هذه الحالة سيتحددان بالصيغتين

$$\varphi=\frac{\varphi_0}{r}a\quad,\quad\sigma=\frac{\varphi_0}{4\pi a}.$$

وإذا كانت الشحنة الكاملة e_0 التى تكتسبها الكرة هى المعطاة على سطح الكرة بدلاً من الجهد φ_0 فإن

$$\varphi_0=\frac{e_0}{a},\quad\sigma=\frac{e_0}{4\pi a^2},\quad\varphi=\frac{e_0}{r}\quad(r>a).$$

وعند ذلك تكون سعة الكرة هى

$$C = a,$$

أى فى وحدات القياس المطلقة تكون سعة الكرة المنفردة مساوية عدديًّا لنصف قطرها .

وبمثابة المثال التالى ندرس مسألة المكثف الكروى (مجموعة من سطحين كرويين موصلين متحدى المركز) .

نفرض أن الكرة الداخلية ونصف قطرها r_1 لها جهد معطى V_0 ، والكرة الخارجية ونصف قطرها r_2 موصلة بالأرض . عندئذ يؤول تحديد المجال داخل المكثف إلى البحث عن الدالة φ التى تحقق المعادلة

$$\Delta\varphi = 0$$

والشرطين

$$\varphi|_{r_1} = V_0, \quad \varphi|_{r_2} = 0.$$

ومن السهل أن نوضح أنه فى هذه الحالة يكون

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right),$$

وسعة المكثف الكروى تكون مساوية

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

وتعتبر مسألة تعيين جهد السطح الكروى عند وجود سطح كروى آخر غير متحد المركز مع الأول مسألة أعقد . وهذه المسألة تحل بطريقة الانعكاسات . والحل التحليلى لها طويل ومعقد ولن نورده هنا .

٦ ـ ننتقل إلى المسائل فى بعدين (ثنائية الأبعاد) .

بمثابة مثال ندرس المكثف الأسطوانى المتكون بأسطوانتين لانهائيتى الطول متحدتى المحور ، على إحداهما توزعت بانتظام الشحنة الكهربائية . ومن الواضح أن حل المسألة واحد فى كل المستويات الموازية لمستوى المقطع العمودى

للأسطوانة . ولذا يمكن اعتبار المسألة مستوية وبدلاً من الشحنة الكاملة إعطاء الشحنة على وحدة الطول $\varkappa$.

وإذا كانت الأسطوانة الخارجية ونصف قطرها r_2 موصلة بالأرض وعلى الأسطوانة الداخلية ونصف قطرها r_1 معطاة الشحنة $\varkappa$ فإن جهد المجال فى المكثف يتحدد بالصيغة

$$\varphi = 2\varkappa \ln \frac{r}{r_2},$$

وسعة وحدة طول المكثف الأسطوانى تساوى

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

والمثال المدروس هذا يكفل حل المسألة الأعقد لتعيين سعة سلك موصل يقع فوق مستوى موصل . نفرض أنه يوجد سلك موصل لانهائى الطول نصف قطره ρ فوق مستوى لانهائى وعلى بعد l منه . وعلى السلك موزعة شحنة كثافتها $\varkappa$ (شحنة وحدة الطول) . من الواضح أن هذه المسألة يمكن حلها كمسألة مستوية (فى بعدين) .

ملحق ٣ ـ المسألة الأساسية للاستكشاف الكهربائى

لدراسة لا تجانس القشرة الأرضية بهدف اكتشاف الخامات تطبق على نطاق واسع الطرق الكهربائية . وينحصر الشكل الأساسى فى طريقة الاستكشاف الكهربائى بتيار مستمر فيما يلى : يمر التيار من بطارية إلى الأرض بواسطة أقطاب كهربائية (ألكترودات) موصلة بالأرض ، ويقاس على سطح الأرض جهد مجال التيار المستمر المتكون بهذه الطريقة . وبواسطة الملاحظات على السطح يتم تحديد تركيب ما تحت الأرض . وتؤسس طرق تحديد التركيب تحت الأرضى (تفسير الملاحظات) على الحل الرياضى لمسائل مناظرة .

إن جهد مجال التيار المستمر فى الوسط المتجانس يحقق معادلة لابلاس

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \qquad (1)$$

بالشرط الإضافى

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \tag{2}$$

الذى يعنى أن المركبة الرأسية لكثافة التيار على السطح (الظاهر) $z=0$ تساوى الصفر لأن نصف الفراغ $z<0$ (الهواء) غير موصل.

ندرس ألكترودا نقطيًا على حدود نصف الفراغ عند النقطة A . ومن الواضح أن جهد المجال سيكون مساويًا .

$$V=\frac{I\rho}{2\pi R}, \tag{3}$$

حيث R البعد عن المصدر A ، ρ المقاومة النوعية للوسط ، I شدة التيار. وهذه الدالة تختلف عن دالة المصدر فى الفراغ اللانهائى بالمعامل 2 وذلك وفقًا المشرط (2).

وبقياس فرق الجهد فى كل من النقطتين N , M الواقعتين على مستقيم واحد مع A بواسطة دائرة قياس نحصل على

$$V(M)-V(N)=\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r,$$

حيث Δr البعد بين النقطتين M , N .

وبفرض أن النقطتين N , M قريبتان كل من الأخرى بدرجة كافية نحصل على :

$$\frac{V(M)-V(N)}{\Delta r}\cong\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\cong\frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

حيث r بعد النقطة O (مركز الدائرة MN) عن الألكترود المغذى. وشدة التيار I فى الدائرة المغذية معلومة لأنها تسجل أثناء سير العمل. ومن هنا نحصل لمقاومة نصف الفراغ المتجانس على :

$$\rho=\frac{2\pi r^2}{I}\cdot\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|. \tag{4}$$

وإذا كان الوسط غير متجانس فإن المقدار ρ المعرف بالعلاقة (4) يسمى بالمقاومة الظاهرية (apparent resistance) ويرمز لها بالرمز ρ_k . و ρ_k لن تكون كمية ثابتة.

ندرس مسألة الاستكشاف الكهربائى الرأسى عندما تقع طبقات القشرة الأرضية أفقيًا وتكون مقاومتها معتمدة فقط على العمق :

$$\rho = \rho(z).$$

وفى هذه الحالة تكون المقاومة الظاهرية دالة فى المسافة $r = AO$. وتنحصر مسألة تفسير نتائج الاستكشافات الكهربائية الرأسية فى تعيين الدالة $\rho(z)$ التى تعطى المقطع الكهربائى للوسط وفقًا لقيم $\rho_k(r)$ المعلومة .

لندرس بالتفصيل مسألة الوسط الثنائى الطبقة عندما تقع طبقة متجانسة سمكها l ومقاومتها ρ_0 على وسط متجانس ذى مقاومة ρ_1 .

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & , \quad 0 \leqslant z < l, \\ \rho_1 & , \quad l < z. \end{cases}$$

ومن الواضح أن المقاومة الظاهرية ρ_k على الأبعاد غير الكبيرة $r \ll l$ تكون مساوية ρ_0 لأن الوسط التحتى سيكون تأثيره طفيفًا.. وللمسافات البعيدة $(r \gg l)$ تكون ρ_k مساوية ρ_1 .

وبذلك تؤول المسألة إلى تعيين حل معادلة لابلاس V_0 فى الطبقة $0 < z < l$ و V_1 فى نصف الفراغ $z > l$. وعندما $z = l$ يجب أن تتحقق شروط اتصال الجهد

$$V_0|_{z=l} = V_1|_{z=l} \tag{5}$$

واتصال المركبات العمودية لكثافة التيار

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial V_0}{\partial z}\bigg|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}\bigg|_{z=l}. \tag{6}$$

وعندما $z = 0$ فإن الجهد V_0 يجب أن يحقق الشرط (2) . وفى النقطة A التى سنختارها نقطة أصل لمجموعة الإحداثيات الأسطوانية (r, φ, z) يجب أن يكون للجهد V_0 انفراد على الصورة (3)

$$V_0 = \frac{\rho_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + v_0, \tag{7}$$

حيث v_0 دالة محدودة .

والدالة V_1 يجب أن تكون محدودة فى اللانهاية . وتحقق الدالتان V_1 , v_0 المعادلة (1) التى تأخذ نظرًا لتماثل المسألة الأسطوانى الصورة

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

وتعطى طريقة فصل المتغيرات نوعين من الحلول المحدودة عند $r=0$ للدالة V :

$$e^{\pm\lambda z}J_0(\lambda r),$$

حيث J_0 دالة بيسل من الرتبة الصفرية (انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ١ ، بند ١) ، λ بارامتر الفصل بين المتغيرات . نبحث عن الحل فى الصورة :

$$V_0(r,\ z)=\frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}+\int_0^\infty (A_0e^{-\lambda z}+B_0e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$

$$V_1(r,\ z)=\int_0^\infty (A_1e^{-\lambda z}+B_1e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$

حيث $A_0,\ B_0,\ A_1,\ B_1$ ثوابت ما . والشرط (2) يعطى العلاقة بين B_0 , A_0 . نحسب

$$\frac{\partial V_0}{\partial z}=-\frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}+\int_0^\infty (-\lambda A_0e^{-\lambda z}+\lambda B_0e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda.$$

والشرط (2) يأخذ الصورة

$$\int_0^\infty (B_0-A_0)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda=0$$

لأى r . ومن هنا يكون

$$B_0=A_0.$$

ومن شرط محدودية V_1 عندما $z\to\infty$ ينتج أن

$$B_1=0.$$

وبذلك فإن

$$V_1(r,\ z)=\int_0^\infty A_1e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

$$V_0(r, z) = \int_0^\infty [qe^{-\lambda z} + A_0(e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_0(\lambda r)\, d\lambda;$$

وعندئذ استخدمنا العلاقة

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda \tag{8}$$

(انظر الكتاب الثانى ، الباب الخامس ، قسم ١ ، بند ٥) ورمزنا بالرمز $q = \frac{\rho_0 I}{2\pi}$.

والثابتان الباقيان A_1 , A_0 يعرفان من الشرطين (6) , (5) فى حالة $z = l$ اللذين يؤولان إلى مجموعة من المعادلات الجبرية :

$$A_0(e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -qe^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0(e^{-2\lambda l} - 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l},$$

ومن هنا نعين المعامل

$$A_0 = q\frac{(\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}}{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}},$$

والحل V_0 للطبقة العليا يعطى بالعلاقة

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}}(e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{9}$$

حيث وضعنا

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

نجرى بعض التحويلات للصيغة الناتجة . حيث إن $|k| < 1$ فإننا يمكن أن نكتب :

$$\frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^\infty k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

$$V_0(r, z) =$$

$$= \frac{I\rho_0}{2\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty k^n e^{-\lambda(2nl+z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda + \frac{I\rho_0}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty k^n e^{-\lambda(2nl-z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{9'}$$

ومن هنا نحصلُ بالاستعانة بالعلاقة (8) على :

$$V_0(r, z)=\frac{I\rho_0}{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-2nl)^2}}+\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2nl)^2}}\right). \quad (10)$$

ويمكن الحصول مباشرة على هذه الصيغة للحل (9) إذا حلت المسألة بطريقة الانعكاسات . بوضع $z=0$ نحصل على توزيع الجهد على سطح الأرض :

$$V_0(r, 0)=\frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{\sqrt{r^2+(2nl)^2}}\right], \quad (11)$$

ومن هنا

$$\frac{\partial V_0}{\partial r}=-\frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n r}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right],$$

ونحصل لـ ρ_k وفقًا للعلاقة (4) على :

$$\rho_k=\rho_0\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n r^3}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right]=$$

$$=\rho_0\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2+n^2\right]^{3/2}}\right]=\rho_0 f(\xi), \quad (12)$$

حيث $\xi=r/l$. وترمز $f(\xi)$ إلى الصيغة بين القوسين المربعين . وعندما $r\ll l$ نحصل على

$$\rho_k\cong\rho_0.$$

ولتقدير سلوك ρ_k عند قيم r الكبيرة نجعل $r\to\infty$ (عندما $\xi\to\infty$) فى العلاقة (12) . ونهاية الحد النونى للجموع ستكون مساوية k^n . ومن هنا ينتج أن

$$\lim_{r\to\infty}\rho_k=\rho_0\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}k^n\right)=\rho_0\left(1+\frac{2k}{1-k}\right)=$$

$$=\rho_0\frac{1+k}{1-k}=\rho_0\frac{\rho_1+\rho_0+(\rho_1-\rho_0)}{\rho_1+\rho_0-(\rho_1-\rho_0)}=\rho_1.$$

وبمقارنة المنحنى التجريبى (الناتج بالتجربة العملية) مع المنحنى المحدد بالعلاقة (12) يمكننا تعيين ρ_0 بقيم ρ_k عند قيم r الصغيرة وتعيين ρ_1 بقيم ρ_k لقيم r

الكبيرة . وسمك الطبقة العليا الموصلة l يحدد بالتجربة فهو يساوى قيمة l التى عندها يكون المنحنى التجريبى بوصفه الدالة $\rho(r/l) = \rho(\xi)$ أقرب ما يمكن للمنحنى المحسوب بالعلاقة (12). ولن نتوقف هنا عند العملية التكنيكية لتحديد l بالتجربة بواسطة مقاييس الرسم اللوغاريتمية المزدوجة .

وفى حالة المقاطع المتعددة الطبقات تحسب منحنيات ρ_k بنفس الطريقة السابقة . وتتحدد طبيعة المقطع الكهربائى للوسط بواسطة اختيار المنحنى النظرى الأقرب انطباقًا على المنحنى التجريبى . وعند ازدياد عدد الطبقات تتعقد عملية التفسير لأن عدد المنحنيات النظرية المساعدة يزداد كثيرًا .

ونشير إلى أنه عند المقاطع الكهربائية المختلفة $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$ تكون المقاومات الظاهرية المناظرة مختلفة أيضًا :

$$\rho_k^{(1)}(r) \neq \rho_k^{(2)}(r);$$

وبالتالى فمسألة تعيين المقطع الكهربائى بقيم المقاومة الظاهرية يكون لها من وجهة النظر الرياضية حل وحيد .

وتقابلنا فى مختلف مجالات الفيزياء والعلوم التكنيكية مسائل مماثلة لمسألة الاستكشاف الكهربائى .

فنقابل المسائل الكهروستاتيكية عند تصميم مختلف الأجهزة الألكترونية ونقابل المسائل الحرارية والهيدروديناميكية فى عديد من مجالات التكنيك (الانتقال الحرارى للمبانى ، ترشيح المياه وراء السدود .. الخ) .

ومسائل تعيين المجال المغناطيسى فى وسط لا متجانس تقابلنا على سبيل المثال فى عملية الاكتشاف المغناطيسى للعيوب والنواقص فى الصناعة . فلتعيين العيب فى قطعة مصنعة ، على سبيل المثال وجود فراغات تحت السطح ، توضع القطعة المعدنية بين قطبى مغناطيس ويقاس المجال المغناطيسى على سطحها . وبدلالة اضطراب المجال المغناطيسى يطلب تعين وجود العيب وكذلك إذا أمكن أبعاده وعمق امتداده وغير ذلك .

ولحل المسائل يستعان بطرق النمذجة المؤسسة على تشابه المجالات الجهدية ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة .

بالفعل لندرس المجالات الجهدية فى الأوساط اللامتجانسة ذات الطبيعة الفيزيائية المختلفة (على سبيل المثال مجال درجات الحرارة المستقر، المجال المغناطيسى فى وسط لامتجانس ، المجال الكهروستاتيكى ، مجال سرعات السائل عند عملية الترشيح) . والدوال الجهدية لهذه المجالات $u(x, y, z)$ فى كل منطقة متجانسة تحقق معادلة لابلاس $\Delta u = 0$. وعلى حدود المنطقتين G_1 , G_2 بمعاملى التوصيل الحرارى المختلفين أو بمعاملى النفاذية المغناطيسية المختلفين وهكذا ، يتحقق الشرط

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

حيث k_2 , k_1 الثابتان الفيزيائيان المناظران .

نفرض أنه على حدود المناطق الهندسية المتساوية معطاة قيم الجهود المتساوية عدديًا ــ أو قيم مشتقاتها العمودية المتساوية عدديًا ــ للمجالات الفيزيائية المختلفة . نفرض أن اللامتجانسات الفيزيائية لهذه المناطق متساوية هندسيًا وموزعة بطريقة واحدة وأن النسب بين الثابتين الفيزيائيين (معامل التوصيل الحرارى ، النفاذية المغناطيسية ...) لأى زوج من اللامتجانسات المناظرة تكون متساوية . عندئذ تكون القيم العددية لجهود هذه المجالات فى النقط الداخلية المناظرة أيضًا متساوية لأنها تعتبر حلاً لنفس المسألة الرياضية التى لها حل وحيد .

ملحق ٤ ــ تعيين المجالات الاتجاهية

فى كثير من مسائل الكهروديناميكا والهيدروديناميكا تقابلنا كثيرًا بالإضافة إلى المسائل المقياسية مسائل تعيين المجال الاتجاهى بدلالة دوران وتباعد هذا المجال .

نثبت أن المجال الاتجاهى $\boldsymbol{A}$ معرف تعريفًا أحادى القيمة داخل منطقة ما G محدودة بسطح مغلق S إذا أعطى دوران وتباعد المجال داخل G :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = C, \tag{2}$$

وعلى الحدود S معطاة المركبة العمودية للمتجه $\boldsymbol{A}$

$$A_n|_S = f(M). \tag{3}$$

ونشير إلى أن الدوال f , B, C لا يمكن إعطاؤها اختياريًا فيجب تحقق العلاقتين :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\iint_S f(M)\, dS = \iiint_G C\, d\tau. \tag{5}$$

وسنعتبر الدالة f متصلة على السطح S ، والدالتين $\boldsymbol{B}$, C متصلتين فى G هما ومشتقاتهما ونعتبر السطح S سطحًا تكون له المسألة الحدية الداخلية بالقيم الحدية المتصلة قابلة للحل .

نحل المسألة المصاغة على عدة مراحل . نعين المتجه $\boldsymbol{A}_1$ الذى يحقق الشروط

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 = C. \tag{7}$$

ومن العلاقة (6) ينتج أن

$$\boldsymbol{A}_1 = \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

وبأخذ الدالة φ على الصورة

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{C(Q)}{R_{PQ}}\, d\tau_Q, \tag{9}$$

نحقق المعادلة (7) أيضًا . والآن نعين المتجه $\boldsymbol{A}_2$ بحيث يكون :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_2 = 0. \tag{11}$$

وبفرض أن

$$\boldsymbol{A}_2 = \operatorname{rot} \psi, \tag{12}$$

نحقق الشرط (11) . بالتعويض بالفرض (12) فى (10) نحصل على

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \psi - \Delta\psi = \boldsymbol{B}. \tag{13}$$

ونطلب أن يكون

$$\operatorname{div} \psi = 0. \tag{14}$$

عندئذ تكون المعادلة (13) للمتجه ψ على الصورة :

$$\Delta\psi = -B. \tag{15}$$

ندرس المنطقة G_1 المحتوية كلية المنطقة G والمحدودة بالسطح S_1 .

نستكمل المتجه B فى المنطقة $G_1 - G$ ونتطلب تحقق الشروط :

١ ـ المركبة العمودية B_n للمتجه B على حدود S متصلة (المتجه B نفسه يكون على وجه العموم منفصلاً) ، $B_{ni} = B_{ne}$ ؛

$$\text{٢ ـ } B_n = 0 \text{ على } S_1 \text{ ؛} \tag{4'}$$

$$\text{٣ ـ } \operatorname{div} B = 0 \text{ فى } G_1 - G \text{ .} \tag{16}$$

ونبين كيفية تنفيذ استكمال B بهذه الصورة فى المنطقة $G_1 - G$. نضع

$$B = \operatorname{grad} \chi \text{ فى } G_1 - G \text{ .}$$

والشرط $\operatorname{div} B = 0$ يعطى

$$\Delta\chi = 0 \text{ فى } G_1 - G \text{ .} \tag{17}$$

والشروط الحدية وفقاً للمطلبين ١ ، ٢ تكون على الصورة :

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = B_{ni} \text{ على } S \text{ ،} \tag{17'}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \text{ على } S_1 \text{ ،} \tag{17''}$$

حيث B_{ni} القيمة النهائية للمركبة B_n على الناحية الداخلية للسطح S . وحصلنا للدالة χ على المسألة الثانية (17)—(17''). والشرط اللازم لقابلية هذه المسألة للحل وهو

$$\iint_{S+S_1} \frac{\partial\chi}{\partial n}\, dS = \iint_S B_n\, dS = 0$$

يتحقق لأن

$$\iint_S B_n\, dS = \iiint_G \operatorname{div} B\, d\tau = 0.$$

وبوضع

$$\psi(P)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_1}\frac{B(Q)}{R_{PQ}}\,d\tau_Q,$$

$$P=P(x,y,z),\ Q=Q(\xi,\eta,\zeta),\ R_{PQ}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

نحقق كما هو واضح المعادلة (15) .

ولا يصعب التأكد من أن الشرط (14) يتحقق أيضًا . فبالفعل نحسب المشتقات

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi_y}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

وبالتعبير عن التكامل المأخوذ على المنطقة G_1 فى صورة مجموع تكاملين مأخوذين على G وعلى G_1-G والأخذ فى الاعتبار العلاقة

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\frac{B_x}{R}\,d\tau=\iiint B_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau=-\iiint B_x\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau,$$

نحصل بعد التكامل بالتجزئة على :

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_{G}\frac{B_x}{R}\,d\tau=\iiint\limits_{G}\frac{\partial B_x}{\partial\xi}\frac{1}{R}\,d\tau-\iint\limits_{S}B_{xi}\frac{\cos\alpha}{R}\,dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_{G_1-G}\frac{B_x}{R}\,d\tau=\iiint\limits_{G_1-G}\frac{\partial B_x}{\partial\xi}\frac{1}{R}\,d\tau+\iint\limits_{S}B_{xe}\frac{\cos\alpha}{R}\,dS-\iint\limits_{S_1}B_x\frac{\cos\alpha_1}{R}\,dS,$$

حيث $\cos\alpha_1=\cos(n,x)|_{S_1}$ ، $\cos\alpha=\cos(n,x)|_S$ ، n اتجاه العمودى الخارجى على السطح .

ونحصل للمشتقة $\frac{\partial\psi_x}{\partial x}$ على :

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_1}\frac{\partial B_x}{\partial\xi}\frac{1}{R}\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{B_{xe}-B_{xi}}{R}\cos\alpha\,dS-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}B_x\frac{\cos\alpha_1}{R}\,dS.$$

وتتحقق صيغتان مماثلتان للمشتقتين

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial y},\quad \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

ومن هنا ينتج أن :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_1} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{B}}{R} d\tau - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{B_n}{R} dS + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{B_{ne} - B_{ni}}{R} dS.$$

ووفقاً للشروط (16) , (4′) , (4) وكذلك شرط اتصال المركبات العمودية للمتجه $\boldsymbol{B}$ على S $(B_{ni} = B_{ne})$ فإن المتجه $\boldsymbol{A}_2$ المعرف بالعلاقة (12) سيحقق المعادلة (10) إذا كان المتجه $\boldsymbol{\psi}$ يحقق الشرطين (15) ، (14).

ومن الواضح أن المتجه $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ يحقق الشرطين :

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{B}, \tag{18}$$

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = C. \tag{19}$$

ولتعيين المتجه $\boldsymbol{A}$ يتبقى أن نحقق الشرط (3) . ولهذا الغرض نعين المتجه $\boldsymbol{A}_3$ الذى يحقق داخل G الشروط :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_3 = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_3 = 0, \tag{21}$$

وعلى S

$$A_{3n}|_S = f(M) - A_{1n}|_S - A_{2n}|_S = f^*(M). \tag{22}$$

ومن الواضح أن الدالة $f^*(M)$ معرفة تعريفاً أحادى القيمة . ومن المعادلة (20) ينتج أن

$$\boldsymbol{A}_3 = \operatorname{grad} \theta.$$

بالتعويض بقيمة $\boldsymbol{A}_3$ هذه فى المعادلة (21) نحصل داخل G على :

$$\Delta\theta = 0; \tag{23}$$

ويعطى الشرط (22) أن

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_S = f^*(M), \tag{24}$$

أى لتعيين الدالة θ نحصل على المسألة الحدية الثانية . ولذا يتحدد المتجه $\boldsymbol{A}_3$ تحديداً أحادى القيمة .

وبذلك أثبتنا أن المسألة (3) — (1) لها حل وحيد

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

ملحق ٥ ـ تطبيق طريقة التحويلات المطابقة فى الكهروستاتيكا

١ ـ لحل مسائل الكهروستاتيكا الثنائية الأبعاد كثيرًا ما يستعان بنظرية الدوال فى المتغير المركب . ندرس على سبيل المثال مسألة الكهروستاتيكا التالية :

عين المجال الكهربائى لعدة موصلات مشحونة جهودها تساوى $u_1, u_2, \ldots$.

وتؤول مثل هذه المسألة كما نعلم (انظر الملحق ٢) إلى المعادلة :

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

بالشروط الحدية

$$u|_{S_i} = u_i, \tag{2}$$

حيث S_i ترمز إلى سطح الموصل رقم i . وإذا أمكن اعتبار المجال مستويًا لا يتغير على سبيل المثال على امتداد المحور z فإن المعادلة (1) والشروط الحدية تأخذ الصورة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{C_i} = u_i, \tag{4}$$

حيث C_i المحيط الذى يحد المنطقة S_i .

سنبحث عن الجهد u بوصفه الجزء التخيلى لدالة تحليلية ما

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y) \qquad (z = x + iy), \tag{5}$$

علمًا بأنه وفقًا لشروط كوشى ـ ريمان يكون :

$$v_x = u_y, \qquad v_y = -u_x \tag{6}$$

و

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \tag{7}$$

ومن الشرط الحدى (4) ينتج أن الدالة $f(z)$ لها جزء تخيلي ثابت على المنحنيات C_i التي تحد الموصلات محل الدراسة .

وباللجوء إلى الشرط (6) نلاحظ أن

$$v(x, y) = \text{const} \tag{8}$$

هي عبارة عن عائلة خطوط (منحنيات) القوى* فى حين أن المعادلة

$$u(x, y) = \text{const} \tag{9}$$

تحدد وفقًا للشرط (7) عائلة الخطوط المتساوية الجهد (equipotential lines) .

وبذلك فلحل المسألة المصوغة يكفى تعيين التحويل المطابق (أو التشاكلي) (conformal transformation)

$$w = f(z),$$

الذى يحول مستوى المتغير المركب

$$z = x + iy$$

إلى المستوى

$$w = v + iu,$$

وبواسطته تتحول حدود الموصلات إلى المستقيمات

$$u = \text{const}$$

أو

$$\text{Im}\, w = \text{const}.$$

وإذا علمت مثل هذه الدالة $w = f(z)$ فإن الجهد المطلوب تعيينه يعين بالعلاقة :

$$u = u(x, y) = \text{Im}\, f(z).$$

---

* بالفعل فمعادلة خطوط القوى تكون على الصورة $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. وبالتعويض عن u_y ، u_x من الشرط (6) بالقيمتين v_x ، $-v_y$ نحصل على $v_x dx + v_y dy = dv = 0$ أو $v(x, y) = \text{const}$.

وبمعرفة الجهد يمكن حساب المجال الكهربائى

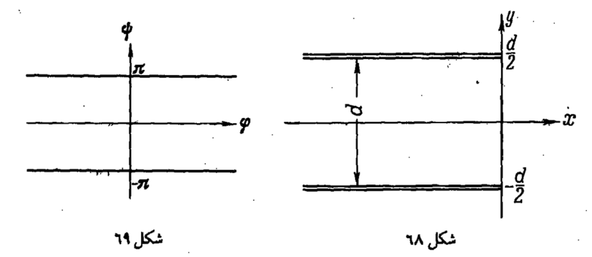
$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

وكثافة الشحنات السطحية فى وحدة الطول على المحور z :

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

التى تكون وفقًا لشروط كوشى ـ ريمان مساوية

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|. \tag{11}$$



شكل ٦٩   شكل ٦٨

٢ ـ مجال المكثف المستوى نصف اللانهائى. نعين مجال المكثف المتكون من لوحين معدنيين $y = d/2$, $y = -d/2$ سمك كل منهما متناه فى الصغر ويمتدان فى المنطقة $x < 0$. ودون أن نتوقف عند استنباط التحويل المطابق الذى يحول المنطقة المبينة على الرسم بشكل ٦٨ إلى الطبقة $|\mathrm{Im}\, w| \leqslant \pi$ سنطبقه مباشرة على حل المسألة المذكورة.

التحويل

$$z = \frac{d}{2\pi}(w + e^w) \quad (w = \varphi + i\psi) \tag{12}$$

يحول المستوى $z = x + iy$ بالقطعين $(y = \pm d/2, \ x < 0)$ إلى الطبقة $|\psi| \leqslant \pi$ (الشريط) على المستوى $w = \varphi + i\psi$ (شكل ٦٩). وبمثابة الجهد المركب نختار الدالة

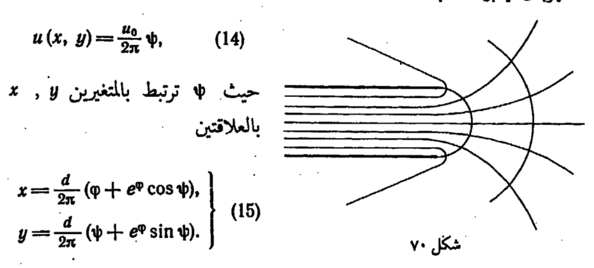
$$\frac{u_0}{2\pi} w, \tag{13}$$

حيث u_0 ترمز إلى فرق الجهد بين لوحى المكثف ، ومن ثم فإن جهد المجال الكهربائى يعبر عنه بالدالة

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi} \psi, \tag{14}$$

حيث ψ ترتبط بالمتغيرين y , x بالعلاقتين

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi}(\varphi + e^{\varphi}\cos\psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi}(\psi + e^{\varphi}\sin\psi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$



شكل ٧٠

وتبين على شكل ٧٠ خطوط القوى وخطوط تساوى الجهد للمكثف المستوى نصف اللانهائى .

ننتقل إلى بحث المجال بالقرب من حافة المكثف .

يتضح من العلاقة (15) أنه عندما $\varphi \to -\infty$ يكون

$$x \approx \frac{d}{2\pi}\varphi, \quad y \approx \frac{d}{2\pi}\psi, \tag{16}$$

أى أن المجال داخل المكثف بعيدًا عن حوافه يكون مستويًا . وعندما $\varphi \to \infty$ يكون

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \frac{d}{2\pi} e^{\varphi}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \approx \psi, \tag{17}$$

أى أن خطوط تساوى الجهد تكون خارج المكثف على مسافات كبيرة من حوافه عبارة عن دوائر .

وإذا أخذنا بدلاً من w الجهد المركب $f = \frac{u_0}{2\pi} w$ بحيث إن $w = \frac{2\pi}{u_0} f$ ، فإن العلاقة بين z و $f(z)$ ستعطى بالمعادلة

$$z = d\left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{2\pi} e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

ومن هنا ينتج :

$$\frac{dz}{df}=\frac{d}{u_0}\left(1+e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

وعندما $f=\frac{u_0}{2\pi}(\varphi\pm\pi i)$ نحصل على :

$$f'(z)=\frac{u_0}{d(1-e^{\varphi})} \quad \text{أو} \quad \frac{dz}{df}=\frac{d}{u_0}(1-e^{\varphi})$$

بوضع $u_0=1$ نحصل لكثافة الشحنات σ وفقًا للعلاقة (11) على القيمة التالية :

$$\sigma=\frac{|f'(z)|}{4\pi}=\frac{1}{4\pi d|1-e^{\varphi}|}. \qquad (18)$$

ومن هنا ينتج أنه عندما $\varphi\to-\infty$ يكون $\sigma\approx 1/4\pi d$ ، وعندما $\varphi\to+\infty$ يكون $\sigma\approx 1/4\pi de^{\varphi}$ أى أنه فى هذه الحالة تتناقص كثافة الشحنات على الناحية الخارجية للألواح مثل $1/\rho$.

ومن العلاقة (18) يتضح أنه عندما $\varphi=0$ (على حافة المكثف) فإن $\sigma=\infty$. بالفعل يكون لحافة اللوح المستوى انحناء لانهائى ، ولشحنها حتى جهد ما من الضرورى أن نضع عليها شحنة لانهائية .

إن دائرة المسائل التى يمكن حلها بطريقة التحويلات المطابقة (أو الانعكاسات المطابقة conformal mapping) واسعة للغاية . فبواسطة هذه الطريقة يمكن بنجاح حل مسألة تأثير حافة الجدار السميك للمكثف المستوى وكثير من المسائل المتعلقة بتأثير الثنى فى المكثف وغيرها . ويمكن أيضًا تطبيق التحويلات المطابقة لحساب المسائل الديناميكية.وعيب هذه الطريقة هو أن التحويلات المطابقة تستخدم أساسًا للمسائل المستوية فقط التى تؤول إلى معادلة لابلاس الثنائية الأبعاد $\Delta_2 u=0$.

ملحق ٦ ـ تطبيق طريقة التحويلات المطابقة فى الهيدروديناميكا

١ ـ عند حل مسائل حركة الجسم الجاسئ فى سائل تلعب الشروط الحدية على سطح الجسم دورًا جوهريًا .

وفى حالة السائل المثالى يكون الشرط الحدى منحصرًا فى أن v_n ـ مسقط سرعة السائل على اتجاه العمودى على سطح الجسم ـ يجب أن تكون مساوية للمركبة العمودية لسرعة حركة الجسم .

وإذا كان الجسم غير متحرك فإن الشرط الحدى يأخذ الصورة المبسطة التالية :

$$v_n = 0$$

على سطح الجسم .

وإذا كانت الحركة جهدية (potential) (المجال محافظ) أى أن :

$$v = \text{grad}\, \varphi,$$

فإن الشروط الحدية تأخذ الصورة التالية :

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0$$ فى حالة الجسم غير المتحرك ،

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = u_n$$ فى حالة الجسم المتحرك بسرعة u .

وكما نعلم من الهيدروديناميكا فإن جهد السرعات للسائل اللامنضغط (incompressible liquid) يحقق المعادلة

$$\Delta\varphi = 0.$$

وبذلك فإن مسألة الانسياب الجهدى للجسم الجاسئ بدفق سائل مثالى لامنضغط تؤول إلى حل معادلة لابلاس

$$\Delta\varphi = 0$$

بالشروط الحدية الإضافية على سطح الجسم الانسيابى

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = u_n,$$

أى إلى حل المسألة الحدية الثانية لمعادلة لابلاس .

وإذا كانت الحركة محل الدراسة مستوية فإن حل المسألة يمكن الحصول عليه بواسطة نظرية الدوال فى المتغير المركب .

فى حالة الحركة المستوية للسائل اللامنضغط تعطى معادلة الاتصال ما يلى :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \qquad (1)$$

نكتب معادلة خطوط التيار

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

على الصورة

$$v_x \, dy - v_y \, dx = 0 \qquad (2)$$

ونستعين بالدالة ψ المعرفة بالعلاقتين

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

وعندئذ ينتج من المعادلة (1) أن الطرف الأيسر للصيغة (2) يكون تفاضلاً تامًّا للدالة ψ :

$$v_x \, dy - v_y \, dx = d\psi.$$

وعائلة المنحنيات الأحادية البارامتر

$$\psi(x, y) = C$$

هى عبارة عن خطوط التيار للسائل اللامنضغط .

وإذا وجد جهد السرعات فإن المتساوية $\operatorname{rot} v = 0$ تكون مكافئة للمعادلة

$$\Delta \psi = 0.$$

ومن صيغتى v_y , v_x ينتج أن :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

أى أن الدالتين ψ , φ تحققان شروط كوشى ـ ريمان . وبالتالى فإن الدالة فى المتغير المركب

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

تكون دالة تحليلية .

وهكذا فكل حركة مستوية جهدية للسائل تناظرها دالة تحليلية معينة فى المتغير المركب وبالعكس كل دالة تحليلية ترتبط بصورة كينماتيكية معينة لحركة السائل (بدقة أكثر ترتبط بصورتين لأنه يمكن استبدال دورى الدالتين ψ , φ) .

ندرس أمثلة معينة على تطبيق نظرية الدوال التحليلية لحل مسائل انسياب الأجسام فى دفق مستو لسائل .

٢ ـ انسياب أسطوانة دائرية . نفرض أنه على أسطوانة دائرية نصف قطرها $r=a$ ينساب دفق مستو لسائل له فى اللانهاية سرعة ثابتة u . وفى حالة الحركة المستقرة يمكن قلب المسألة ودراسة حركة الأسطوانة ذات السرعة الثابتة u بالنسبة إلى السائل .

نربط بالأسطوانة مجموعة إحداثيات غير متحركة ونمد المحور Ox موازيًا لسرعة حركة الأسطوانة ..

وعلى سطح الجسم المتحرك فى السائل يتحقق الشرط الحدى :

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=u\frac{\partial y}{\partial s},$$

حيث ds عنصر طول القوس على المنحنى الذى يحد الجسم .

وفى حالة الحركة الانتقالية بالسرعة u يمكن تكامل هذا الشرط على سطح الجسم . ونحصل على :

$$\psi=uy+C$$

على سطح الجسم .

وهكذا آلت مسألتنا إلى دراسة المعادلة

$$\Delta\psi=0$$

بالشروط الحدية :

١ ـ $\psi=uy+C$ على سطح الأسطوانة ؛

٢ ـ $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ و $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ تؤولان إلى الصفر فى اللانهاية .

والشرط الأخير يعنى أن الدالة

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\psi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-iv_y$$

تكون خارج الدائرة C دالة تحليلية أحادية القيمة تؤول إلى الصفر فى النقطة البعيدة بعدًا لانهائيًا . وهذا يكفل التعبير عن الدالة w فى الصورة

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \dots$$

بوضع

$$C_k = A_k + iB_k,$$

نعين الثوابت A_k, B_k من الشرط الحدى :

$$\psi = ua \sin\theta + C,$$

وذلك بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية $z = ae^{i\theta}$.

ونحصل للثوابت على الصيغ التالية :

$$A_1 = 0; \quad A_2 = ua^2; \quad B_2 = 0; \quad A_3 = B_3 = 0;$$
$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

ومن هنا

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - u\frac{a^2}{z};$$
$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - u\cos\theta\frac{a^2}{r};$$
$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + u\sin\theta\frac{a^2}{r}.$$

والحد الأول فى صيغة w يعبر عن دوران (circulation) الشدة Γ حول الأسطوانة . وفى الحالة المبسطة عند انعدام الدوران نحصل على

$$w = -u\frac{a^2}{z}.$$

والجهد المركب للدفق الذى ينساب حول أسطوانة غير متحركة وسرعته فى اللانهاية u يكون على الصورة :

$$w = uz + \frac{ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

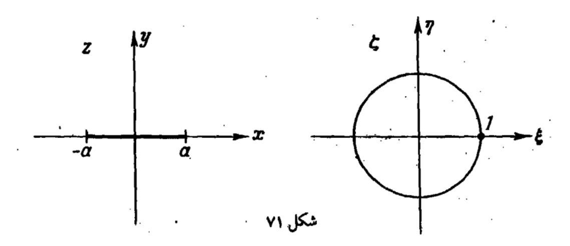
٣ ـ انسياب اللوح . تكفل النتائج التى حصلنا عليها لانسياب الأسطوانة الدائرية حل مسألة انسياب أية محيطات اختيارية . وعند ذلك تطبق طريقة

التحويلات المطابقة. ندرس تطبيق هذه الطريقة على مثال محدد هو انسياب اللوح.

نفرض أنه على لوح متناهى الطول عرضه $2a$ وواقع على المحور Ox (شكل ٧١) ينساب دفق مستو ثابت سرعته فى اللانهاية لها المركبتان v , u. بواسطة الدالة التحليلية

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)=f(\zeta)$$

يمكن إحداث التناظر الأحادى القيمة المتبادل بين المنطقة خارج اللوح على



شكل ٧١

المستوى z والمنطقة خارج دائرة نصف قطرها الواحد الصحيح على المستوى ζ. وعند ذلك فالنقطة $z=\infty$ تناظر النقطة $\zeta=\infty$ و

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{a}{2}>0 \quad \text{عندما} \quad \zeta=\infty .$$

لنركيف يتغير الشرط فى اللانهاية. للجهد المركب

$$w(z)=\varphi+i\psi$$

يكون لدينا

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty}=u-iv=\bar{v}_{\infty}$$

وهى القيمة المرافقة للسرعة المركبة.

نعين قيمة السرعة المركبة للتيار اللاحقيقى (التصورى) على المستوى ζ :

$$w(\zeta)=w\left[f^{-1}(z)\right];\quad \frac{dw}{d\zeta}=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta},$$

ومن هنا

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty}=k\bar{v}_\infty \quad \left(k=\frac{a}{2}\right).$$

وهكذا فالتيار اللاحقيق هو عبارة عن انسياب أسطوانة نصف قطرها الواحد الصحيح بدفق له فى المالانهاية سرعة مركبة kv_∞ . ولهذه الحركة يكون الجهد المركب على الصورة :

$$w(\zeta)=k\bar{v}_\infty\zeta+\frac{k\bar{v}_\infty}{\zeta}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$

ومن العلاقة $z=f(\zeta)$ ينتج أن

$$\zeta=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}; \quad \frac{1}{\zeta}=\frac{z-\sqrt{z^2-a^2}}{a}.$$

وبالاستعانة بهذه العلاقات نحصل للجهد المركب للسائل المنساب حول اللوح على الصيغة :

$$w(z)=uz-iv\sqrt{z^2-a^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}\right).$$

وفى حالة انعدام الدوران تأخذ هذه الصيغة الصورة :

$$w(z)=uz-iv\sqrt{z^2-a^2}.$$

ويتضح من العلاقات الناتجة أن السرعة على أطراف اللوح تصل إلى قيم كبيرة كبرًا لانهائيًا . ولا يتحقق ذلك بالطبع فى الظروف الحقيقية . وتفسر نتائجنا بأننا نعتبر السائل مثاليًا . وبتطبيق نظرية برنوللى يمكن تعيين صيغة القوة المؤثرة على الجسم الذى ينساب حوله السائل .

وتهتم نظرية الجناح فى الديناميكا الهوائية بدراسة القوى التى يؤثر بها الهواء على جناح الطائرة المتحركة فيه . وفى تطوير هذه النظرية قام بالدور الأكبر العلماء الروسيون والسوفييت وبالدرجة الأولى ن . جوكوفسكى وس . تشابليجين . وفى الحالة المبسطة عند الانسياب اللادورانى للأسطوانة بواسطة دفق مستو لسائل ما نحصل على نتيجة غير متوقعة وهى أن الدفق لا يؤثر بأى تأثير على الأسطوانة . وفى حالة تراكب دوران السرعة حول الأسطوانة على الدفق الانتقالى تنشأ قوة تؤثر

على الأسطوانة عموديًا على اتجاه سرعة الدفق فى اللانهاية .

ونظرية الدوال التحليلية يمكن أن تستخدم فى حالة الحركة المستوية فقط . وفى حالة الفراغ الثلاثى الأبعاد نضطر إلى اللجوء إلى طرق أخرى لحل مسائل انسياب السائل حول الجسم الجاسئ . وفى الحالة العامة يكون حل المسألة على جانب كبير من الصعوبة . لندرس حالة مبسطة هى حركة كرة بسرعة ثابتة فى سائل ساكن لا محدود . وتنحصر المسألة فى حل المعادلة

$$\Delta\varphi = 0$$

خارج الكرة بالشرط الحدى

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=a} = u\cos\theta \qquad \text{على سطح الكرة .}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{فى اللانهاية .}$$

نبحث عن الحل فى الصورة

$$\varphi = A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

وبالاستعانة بالشرط الحدى نحصل على :

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^2}\cos\theta,$$

وهو ما يعطى حل المسألة المصاغة .

وفى كل الحالات التى درسناها اعتبرنا السائل مثاليًا . وللسائل اللزج تتغير الشروط الحدية . فعلى سطح الجسم يجب تحقق شرط الالتصاق وهو على وجه التحديد أنه فى نقط الحدود الصلبة تكون سرعة السائل منطبقة فى المقدار والاتجاه على سرعة النقطة المناظرة للحدود .

وتؤدى مسائل انسياب الأجسام بالسائل اللزج إلى صعوبات رياضية جمة . وقد لعبت نظريات الطبقة المتاخمة دورًا كبيرًا فى تطوير هذا الفرع من الهيدروديناميكا .

ملحق ٧ ـ المعادلة المزدوجة التوافقية

حصلنا فى الملحق ٢ بالباب الثانى على معادلة الذبذبات المستعرضة للقضيب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \qquad (1)$$

ومسألة ذبذبات لوح رقيق حر من الأحمال ومثبت عند طرفيه تؤول أيضًا إلى معادلة مشابهة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta\ \Delta u = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \qquad (2)$$

والشرطين الحديين

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{على الحدود} . \qquad (3)$$

وعلاوة على ذلك فإن الدالة u يجب أن تحقق الشرطين الابتدائيين :

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \qquad (4)$$

وإذا أثرت على اللوح قوة خارجية موزعة بالكثافة $f(x, y)$ فإن الانحناء الاستاتيكى للوح المثبت عند طرفيه سيتحدد بالمعادلة

$$\Delta\Delta u = f \qquad (5)$$

بالشرطين الحديين

$$u = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 . \qquad (3)$$

والمعادلة

$$\Delta\Delta u = 0 \qquad (5')$$

تسمى بالمعادلة المزدوجة التوافقية (biharmonic equation) وحلولها التى لها مشتقات حتى الرتبة الرابعة بما فى ذلك مشتقات الرتبة الرابعة تسمى بالدوال المزدوجة التوافقية (biharmonic functions) .

والمسألة الحدية الأساسية للمعادلة المزدوجة التوافقية تصاغ كما يلى :

عين الدالة $u(x,y)$ المتصلة هى ومشتقتها الأولى فى المنطقة المغلقة $S+C$ والتى لها مشتقات حتى الرتبة الرابعة فى S وتحقق المعادلة (5) أو ('5) داخل S والشروط الحدية على C

$$u|_C = g(s); \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = h(s), \tag{6}$$

حيث $h(s)$, $g(s)$ دالتان متصلتان فى طول القوس s .

وعند حل المسألة السابق صياغتها (4) — (2) بالشروط الابتدائية بطريقة فصل المتغيرات يفرض كالعادة أن

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, T(t). \tag{7}$$

وبالتعويض عن هذه الصيغة فى المعادلة (2) وفصل المتغيرات نصل إلى مسألة البحث عن القيم الذاتية للمعادلة

$$\Delta\Delta v - \lambda v = 0 \tag{8}$$

بالشروط الحدية

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{على } C. \tag{9}$$

١ ــ **وحدانية الحل**. نثبت أن المعادلة المزدوجة التوافقية

$$\Delta\Delta u = 0$$

بالشروط الحدية

$$u|_C = g(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = h(s) \tag{3'}$$

يكون لها حل وحيد.

نفرض أنه يوجد حلان u_1 , u_2 . ندرس الفرق بينهما

$$v = u_1 - u_2.$$

والدالة v تحقق المعادلة المزدوجة التوافقية ('5) والشروط الحدية المتجانسة

$$v|_C = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_C = 0.$$

وبتطبيق علاقة جرين

$$\int_G (\Delta\varphi \cdot \psi - \varphi \Delta\psi)\, dS = \int_C \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) ds$$

على الدالتين $\varphi = v, \ \psi = \Delta v$ نحصل على :

$$\int_G (\Delta v)^2 \, dS = 0,$$

ومن هنا

$$\Delta v = 0.$$

وبالأخذ فى الاعتبار أن $v|_C = 0$ نحصل على

$$v \equiv 0 \quad , \quad u_1 \equiv u_2.$$

وبالتالى فالدالة المزدوجة التوافقية تتحدد تحديدًا أحادى القيمة بالشروط الحدية $(3')$.

٢ ــ التعبير عن الدوال المزدوجة التوافقية بدلالة الدوال التوافقية . تثبت النظرية التالية :

إذا كانت $u_1 \ , u_2$ دالتين توافقيتين فى منطقة ما G فإن الدالة $u = xu_1 + u_2$ تكون دالة مزدوجة التوافقية فى المنطقة G .

للإثبات نستعين بالمتطابقة

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \qquad (10)$$

بفرض

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

نعين

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \qquad (11)$$

وبتطبيق المؤثر Δ (مؤثر لابلاس) مرة أخرى والأخذ فى الاعتبار أن $\Delta\Delta u_2 = 0$ نحصل على :

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0.$$

وإذا كانت المنطقة G هى بحيث لا يقطع حدودها أى مستقيم مواز للمحور x فى أكثر من نقطتين فإن النظرية العكسية تكون صحيحة :

لأية دالة مزدوجة التوافقية معطاة فى المنطقة G توجد الدالتان التوافقيتان u_2 , u_1 بحيث يكون

$$u = xu_1 + u_2.$$

ومن الواضح أنه يكفى لإثبات هذه النظرية أن نثبت إمكانية اختيار الدالة u_1 التى تحقق الشرطين :

$$\Delta u_1 = 0, \qquad (12)$$

$$\Delta(u - xu_1) = 0. \qquad (13)$$

ومن الشرط (13) والعلاقة (11) ينتج أن

$$\Delta u = \Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \qquad (14)$$

وتحقق المعادلة (14) الدالة

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, y)\, d\xi.$$

وحيث إن

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\bar{u}_1 = \Delta\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}_1 = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0,$$

فإن $\Delta\bar{u}_1$ تعتمد فقط على y :

$$\Delta\bar{u}_1 = v(y).$$

نعرّف الدالة $\bar{\bar{u}}_1(y)$ بحيث يكون

$$\Delta\bar{\bar{u}}_1 = \frac{\partial^2\bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

ونضع $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1$. وهذه الدالة ـ كما هو واضح ـ ستحقق الشرطين (12) و (13) .

لندرس صورة أخرى للتعبير عن الدوال المزدوجة التوافقية . نفرض أن نقطة أصل الإحداثيات قد اختيرت داخل المنطقة G وأن أى شعاع خارج من نقطة الأصل يقطع حدود المنطقة G فى نقطة واحدة فقط . عندئذ يمكن التعبير عن أية دالة مزدوجة التوافقية u فى G بواسطة الدالتين التوافقيتين u_2 . u_1 فى الصورة :

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2. \tag{15}$$

وهنا $r^2 = x^2 + y^2$. r_0 ثابت معطى .

وهذه النظرية تثبت كالنظرية السابقة بواسطة المتطابقة (10) والعلاقتين

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

٣ ـ حل المعادلة المزدوجة التوافقية للدائرة . ندرس دائرة نصف قطرها r_0 ومركزها فى نقطة الأصل . ونبحث عن الدالة المزدوجة التوافقية التى تحقق عند $r = r_0$ الشروط الحدية (6) . وكما أسلفنا يمكن التعبير عن الدالة المطلوب تعيينها فى صورة المجموع

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2, \tag{15}$$

حيث u_2 . u_1 دالتان توافقيتان . ومن الشروط الحدية نجد أن

$$u_2 |_{r=r_0} = g. \tag{16}$$

ومن هنا يتضح أن u_2 هى حل المسألة الحدية الأولى لمعادلة لابلاس ويمكن التعبير عنها بواسطة تكامل بواسون

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\, g\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \tag{17}$$

ومن الشرط الحدى الثانى نحصل على

$$2r_0 u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = h. \tag{18}$$

ولا يصعب التأكد بعملية التفاضل مباشرة من أن الدالة

$$2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r} \tag{19}$$

تحقق معادلة لابلاس ولذا يمكن التعبير عنها بتكامل بواسون :

$$2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2 - r^2)\,h\,d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)}. \tag{20}$$

وبتفاضل (17) بالنسبة إلى r والتعويض بقيمة $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ فى العلاقة (20) نعين u_1 .
وبالتعويض فى العلاقة (15) بصيغتى u_2 ، u_1 الناتجتين نحصل على :

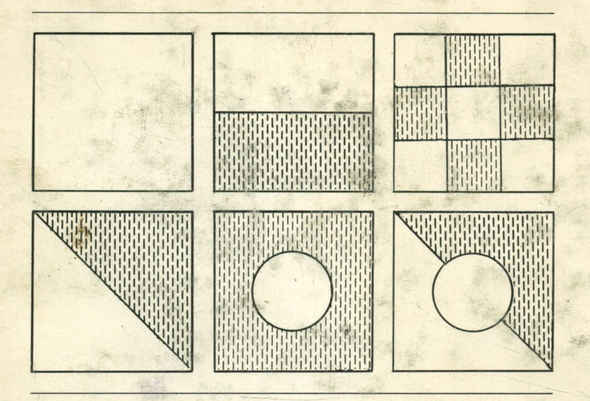
$$u = \frac{1}{2\pi r_0}(r^2 - r_0^2)^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-h\,d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)} + \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi}\frac{g\,[r_0 - r\cos(\alpha - \theta)]\,d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)]^2}\right].$$

المحتويـات

الاكاديمى أ. تيخونوف عالم سوفييتى بارز فى مجال الرياضيات والجيوفيزياء. وإلى جانب نشاطه التعليمى بجامعة موسكو قام بدراسات وأبحاث علمية هامة ساهم بها فى تطوير نظرية الفئات وبعض أقسام الفيزياء الرياضية. وله كذلك أعمال فى الجيوفيزياء وخاصة فى نظرية انتشار المجالات الكهرمغنطيسية وتطبيقها على استكشاف مكامن الثروات الطبيعية.

الاكاديمى أ. سامارسكى رئيس قسم بمعهد الرياضيات التطبيقية التابع لاكاديمية العلوم السوفييتية. وكان على مدى سنين يقوم بالقاء محاضرات فى الرياضيات بجامعة موسكو حيث تربى على يده عدد من الباحثين العلميين الشباب. وله أكثر من ٢٠٠ بحث فى الرياضيات النظرية والتطبيقية.

وقد منح كل من المؤلفين بعض الجوائز الحكومية تقديرا لأفضالها فى تطوير العلم.



محتويـات الكتـاب الأول

- تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية
- المعادلات من النمط الزائدى. ذبذبة الأوتار والقضبان. نظرية الموجات الصادمة. ديناميكا امتصاص الغازات
- المعادلات من النمط المكافئ. موجات درجة الحرارة. دالة دلتا
- المعادلات من النمط الناقصى. مسائل الكهروستاتيكا. المعادلة المزدوجة ال